Übungen zur Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2016

Universität Heidelberg
Andreas Ott
Benjamin Kupferer

Blatt 03
Abgabetermin: Freitag, 13.05.16, 9.00 Uhr

Aufgabe 1. **(2+2 Punkte)**
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es gibt eine projektive Ebene, die eine affine Ebene ist.

(b) Sei $n \geq 5$ eine natürliche Zahl und $\mathbf{P} := \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann gibt es $\mathbf{G} \subseteq \operatorname{Pot}(\mathbf{P})$, sodass $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine projektive Ebene ist.

Aufgabe 2. **(2 Punkte)**
Zeigen Sie, dass die Fanoebene projektiv isomorph zu $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ ist.

Aufgabe 3. **(2+2 Punkte)**
Dieser Aufgabe liegt die affine Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ zu Grunde.

(a) Geben Sie das Parallelenbüschel $[g_{\binom{1}{0},\binom{2}{1}}]$ sowohl als Menge, als auch durch eine Skizze an. Geben Sie darüber hinaus die Mächtigkeit der Menge $[g_{\binom{1}{0},\binom{2}{1}}]$ an.

(b) Geben Sie das Geradenbüschel $\binom{2}{1}^*$ sowohl als Menge, als auch durch eine Skizze an. Geben Sie darüber hinaus die Mächtigkeit der Menge $\binom{2}{1}^*$ an.

Aufgabe 4. **(2+2 Punkte)**
Sei K ein Körper und $\sigma\colon K \to K$ ein Körperautomorphismus, d.h. σ ist bijektiv und für alle $x, y \in K$ gilt

$$\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y) \text{ sowie}$$
$$\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y).$$

Sei weiterhin $M \in \mathrm{GL}_2(K)$, $v \in K^2$ und $\varphi\colon K^2 \to K^2$ wie folgt gegeben:

$$\varphi\colon K^2 \to K^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M \cdot \begin{pmatrix} \sigma(x) \\ \sigma(y) \end{pmatrix} + v.$$

(a) Zeigen Sie, dass φ bijektiv ist.

(b) Sei $A \in K^2$ und $w \in K^2 \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi(g_{A,w}) = g_{\varphi(A),\varphi(w)-v}$$

gilt und folgern Sie, dass φ ein affiner Isomorphismus ist.