Übungen zur Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2016

Universität Heidelberg
Andreas Ott
Benjamin Kupferer

Blatt 02
Abgabetermin: Freitag, 06.05.16, 9.00 Uhr

Aufgabe 1. **(2+2+2 Punkte)**
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei R ein beliebiger Ring, $g_{A,v} = \{A + \lambda v | \ \lambda \in R\}$ für $A \in R^2, v \in R^2 \backslash \{0\}$ und $\mathbf{G}_R = \{g_{A,v} | \ A \in R^2, v \in R^2 \backslash \{0\}\}$. Dann ist das Paar $(R^2, \mathbf{G}_R)$ eine Inzidenzebene.

(b) Sei $n \geq 5$ eine natürliche Zahl und $\mathbf{P} := \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann gibt es $\mathbf{G} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathbf{P})$, sodass $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene ist, die das schwache Parallelenaxiom (p) erfüllt.

(c) Sei $n \geq 5$ eine natürliche Zahl und $\mathbf{P} := \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann gibt es $\mathbf{G} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathbf{P})$, sodass $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine affine Ebene ist.

Aufgabe 2. **(4 Punkte)**
Überlegen Sie für jede der vier Isomorphieklassen von Inzidenzebenen mit fünf Punkten (vgl. Aufgabe 3 Blatt 01) ob sie das schwache Parallelenaxiom (p), das starke Parallelenaxiom (P) oder keines von beiden erfüllt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. **(1+1+1 Punkte)**
Sei K ein Körper und $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^2$ sowie $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^2$.
Beschreiben Sie die Gerade

$$g_{A,v} = A + Kv$$

in K^2 sowohl als Punktmenge als auch durch eine Skizze für folgende Körper K:

(a) $K = \mathbb{R}$.

(b) $K = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) $K = \mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. **(2+2 Punkte)**
Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine affine Ebene und seien $g, h \in \mathbf{G}$ zwei Geraden.

(a) Zeigen Sie, dass es $k \in \mathbf{G}$ gibt, mit $k \nparallel g$ und $k \nparallel h$.

(b) Sei nun ein $k \in \mathbf{G}$ mit $k \nparallel g$ und $k \nparallel h$ gewählt. Für $A \in \mathbf{P}$ bezeichne l_A die eindeutige zu k parallele Gerade mit $A \in l_A$.
Zeigen Sie, dass die Abbildung $\psi \colon g \to h, \ A \mapsto l_A \wedge h$ wohldefiniert und bijektiv ist.

Aufgabe 5. **(3+1 Punkte)**

Sei K ein Körper, $\mathbf{P}$ die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von K^3 und

$$\mathbf{G} = \left\{ g \in \mathrm{Pot}(\mathbf{P}) \;\middle|\; \bigcup_{A \in g} A \text{ ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von } K^3. \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine affine Ebene ist.