Übungen zur Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2016

Universität Heidelberg
Andreas Ott
Benjamin Kupferer

Blatt 01
Abgabetermin: Freitag, 29.04.16, 9.00 Uhr

Aufgabe 1. **(1+1+2 Punkte)**
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $\mathbf{P} = \{A, B, C, D\}$ und $\mathbf{G} = \{\{A, B, C\}, \{A, D\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$. Dann ist das Paar $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene.

(b) Sei $\mathbf{P} = \{A, B, C, D\}$ und $\mathbf{G} = \{\{A, B, C\}, \{A, C, D\}, \{B, D\}\}$. Dann ist das Paar $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene.

(c) Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl und $\mathbf{P} := \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann gibt es $\mathbf{G} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathbf{P})$, sodass $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene ist.

Aufgabe 2. **(1,5+1+1,5 Punkte)**
Sei $\mathbf{P}$ eine nichtleere Menge und $\mathbf{G} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathbf{P})$. Mit (I_3') wird das folgende Axiom bezeichnet:

(I_3') Zu jedem Punkt $A \in \mathbf{P}$ gibt es $B, C \in \mathbf{P}$, sodass $\{A, B, C\}$ nicht kollinear ist.

(a) Zeigen Sie, dass falls das Paar $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ das Axiom (I_3') erfüllt, so erfüllt es auch (I_3).

(b) Finden Sie ein Paar $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$, welches (I_3) aber nicht (I_3') erfüllt.
(*Hinweis:* Das Paar $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ kann in diesem Fall keine Inzidenzebene sein (vgl. Teilaufgabe (c)).)

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ genau dann eine Inzidenzebene ist, wenn die Axiome (I_1), (I_2) und (I_3') gelten.

Aufgabe 3. **(1+1,5+1,5 Punkte)**
Seien $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ und $(\mathbf{P}', \mathbf{G}')$ Inzidenzebenen. Eine Abbildung $\varphi \colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ heißt **Isomorphismus von Inzidenzebenen**, falls sie bijektiv ist und $\varphi(g) \in \mathbf{G}'$ für alle $g \in \mathbf{G}$ gilt (dabei ist $\varphi(g) = \{\varphi(A) |\ A \in g\}$).

(a) Seien $A, B \in \mathbf{P}$ mit $A \neq B$. Zeigen Sie $\varphi(A \vee B) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$.

(b) Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung $\varphi \colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}',\ g \mapsto \varphi(g)$ bijektiv ist.

(c) Bestimmen Sie, bis auf Isomorphie, alle Inzidenzebenen mit fünf Punkten. Skizzieren Sie die verschiedenen Inzidenzebenen und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4. **(1+1+1+1 Punkte)**

Die fünf Freunde Arne, Bernd, Christian, Dirk und Emil verbringen einen Abend mit Tischfussball. Sie spielen fünf Spiele in Teams zu je zwei Personen:

	Team 1	Team 2	Resultat
Spiel 1	Arne und Bernd	Christian und Dirk	10:3
Spiel 2	Arne und Dirk	Emil und Christian	5:10
Spiel 3	Bernd und Emil	Dirk und Arne	1:10
Spiel 4	Arne und Christian	Dirk und Emil	9:11
Spiel 5	Arne und Emil	Bernd und Christian	3:10

Die fünf Freunde sind nun unsere Punktmenge **P**. Entscheiden Sie jeweils, ob man für die folgenden Definitionen von Geradenmengen **G** eine Inzidenzebene erhält.

(a) **G** ist die Menge aller Teams, die an dem Abend zusammen gewonnen haben.

(b) **G** ist die Menge aller Teams, die an dem Abend zusammen gespielt haben.

(c) **G** ist die Menge aller Teilmengen von zwei Spielern, die sich an diesem Abend als Gegner gegenüber standen.

(d) **G** ist die Menge aller Teilmengen von zwei Spielern, die sich an diesem Abend in einem Spiel mit insgesamt mehr als 14 Toren gegenüber standen.