Universität Heidelberg Prof. Dr. O. Venjakob
Mathematisches Institut P. Barth

Étale Kohomologie und L-Funktionen

Wintersemester 2009/2010

Aufgabenblatt 12 22. Januar 2010

Aufgabe 1. *(16 Punkte)*

Wir wollen im Fall von Kurven die Existenz von étalen Umgebungen zeigen, so dass die Spurabbildung auf der Kohomologie mit kompaktem Träger (außer im höchsten Grad) verschwindet. Dazu definieren wir zunächst allgemeiner für quasi-endliche, flache $f : Y \to X$ eine Spurabbildung $S_{X/Y} : f_! f^*(F) \to F$: f lässt sich schreiben als $f = \bar{f} \circ i$ wobei $\bar{f}$ eine endliche Abbildung und i eine offene Immersion ist. Dann definieren wir $f_! := \bar{f}_* i_!$. In diesem Setting erhalten wir für einen geometrischen Punkt x in X $f_! f^*(F)_x = \bigoplus_{y \in f^{-1}(x)} F_x$. Wir finden eine Abbildung, die auf den Halmen durch $(s_y)_{y \in f^{-1}(x)} \mapsto \sum n(y) s_y$ gegeben ist. (Hier ist $n(y)$ der Rang der von f induzierten Erweiterung der strikten lokalen Ringe.) Diese Abbildung ist verträglich mit offenen Immersionen.

a) Mache dir klar, was diese Konstruktion bedeutet. Zeige: Ist f étale, dann ist das die Spurabbildung aus der Vorlesung.

b) Seien nun X und Y glatte irreduzible Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und $\overline{X} \supset X$ und $\overline{Y} \supset Y$ projektive glatte Kurven, die X bzw. Y als offene Unterschemata enthalten. Weiterhin sei $f : \overline{Y} \to \overline{X}$ ein endlicher Morphismus, so dass $f(Y) \subset X$ und $f|Y$ ist étale. Die reduzierten abgeschlossenen Komplemente bezeichnen wir mit E und F. Zeige: Dann haben wir für n prim zur Charakteristik von k ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^0(F, \mu_n) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & H^1_c(Y, \mu_n) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\overline{Y}, \mu_n) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & H^0(E, \mu_n) \arrow[r] & H^1_c(Y, \mu_n) \arrow[r] & H^1(\overline{X}, \mu_n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dabei ist die Abbildung ϕ durch die den irreduziblen Komponenten von E und F entsprechende Zerlegung gegeben: Wird $f \in F$ nicht nach E geschickt, dann liegt der direkte Summand $H^0(f, \mu_n)$ im Kern, und wird $f \in F$ auf $e \in E$ geschickt, dann sind die entsprechenden direkten Summanden kanonisch isomorph und die Abbildung ist "Multiplikation mit dem Verzweigungsgrad".

c) Zeige: Man kann ψ als Einschränkung einer Abbildung $Pic^0(Y) \to Pic^0(X)$ auf die n-Torsion auffassen und gib die Abbildung an. Bemerkung: Diese Abbildung heißt Albanese Abbildung, und lässt sich gut geometrisch beschreiben.

d) Sei für ein Schema V die Konstante Garbe $\mathbb{Z}/n$ mit Λ_V bezeichnet, wobei n immer noch prim zur Charakteristik von k ist. Führe die Existenz einer étalen irreduziblen Umgebung $j : Y \to X$ eines Punktes x in einer glatten quasi-projektiven Kurve X über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, so dass die Spurabbildungen aus der Vorlesung $H^q_c(X, j_! \Lambda_Y) = H^q_c(Y, \Lambda_Y) \to H^q_c(X, \Lambda_X)$ für $q = 0, 1$ verschwinden, auf die folgenden Aussagen zurück:

Sei $\overline{X}$ eine glatte projektive Kurve

(a) Es gibt eine glatte, endliche, unverzweigte Überlagerung $\overline{Y} \to \overline{X}$, so dass der Kern von $Pic^0(\overline{Y}) \to Pic^0(\overline{X})$ alle n-Torsion von $Pic^0(Y)$ enthält.

(b) Es gibt eine endliche Abbildung $\overline{Y} \to \overline{X}$, die in einer Umgebung von einem gegebenen Punkt x von X unverzweigt ist und deren Verzweigungsgrad an einer zu x disjunkten endlichen Menge von Punkten durch n geteilt wird.

e) Zeige die zweite Aussage aus dem letzten Punkt durch "explizite" Konstruktion der Überlagerung. (Tipp: Glatte Kurven entsprechen Funktionenkörpern (Algebraische Geometrie))

Bemerkung: Die noch fehlende Behauptung aus d) folgt aus der "Albanese Eigenschaft" der Jakobischen einer Kurve. Ich werde in der Übung die Idee beschreiben.