Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. O. Venjakob
P. Barth

Étale Kohomologie und L-Funktionen

Wintersemester 2009/2010

Aufgabenblatt 8 04. Dezember 2009

Aufgabe 1. *(6 Punkte)*

a) Sei X ein Schema und Z_1 und Z_2 zwei abgeschlossene Unterschemata mit den abgeschlossenen Immersionen i_1 und i_2. Wir nehmen an, dass Z_1 und Z_2 disjunkt sind (d.h. sie sind disjunkt als Teilmengen). Sei $Z = Z_1 \cup Z_2$ dies ist auch ein abgeschlossenes Unterschema von X mit Immersion i. Zeige: $i_*\mathbb{Z} \cong (i_1)_*\mathbb{Z} \oplus (i_2)_*\mathbb{Z}$ Folgere: $H^i_Z(X, F) = H^i_{Z_1}(X, F) \oplus H^i_{Z_2}(X, F)$ für jede étale Garbe F auf X.

b) Sei X ein affines separiertes Schema vom endlichen Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und F eine Garbe auf X_{et}. Benutze, dass alle affinen eigentlichen Schemata endlich sind (Hartshorn II Exercise 4.6) um zu zeigen, dass die Ableitungen von $H^0_c(X, \bullet)$ durch $(R^pH^0(X, \bullet))(F) = \bigoplus_x H^p_x(Spec(\mathcal{O}^h_{X,x}), F)$ gegeben sind, dabei durchläuft x alle abgeschlossenen Punkte von X und $\mathcal{O}^h_{X,x}$ bezeichnet die Henselisierung des lokalen Rings bei x.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*

a) Sei $g : X' \to X$ ein étaler Morphismus. Bestimme g^* indem du die Schnitte von g^*F genau angibst. Bemerke: g^* ist exakt und erhält Injektive. Tipp: Wenn das Ergebnis nicht klar sein sollte, hilft es vielleicht sich zunächst den Fall einer offenen Immersion zu überlegen.

b) Sei nun $\pi : Y \to X$ ein quasi-kompakter Morphismus und $Y' = X' \times_X Y$. Betrachte das Basis-Wechsel-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array} \qquad (1)$$

Zeige für eine Garbe F auf Y durch nachrechnen auf den Halmen oder einer alternativen Schreibweise der Abbildung: Der Basis-Wechsel-Morphismus $g^*(R^i\pi_*F) \to R^i\pi'_*(g'^*F)$ ist ein Isomorphismus.

Bemerkung: Hier soll natürlich der Satz über den glatten Basiswechsel weder benutzt noch im Allgemeinen bewiesen werden, sondern nur ein sehr viel einfacherer Spezialfall. Das sollte man den Lösungen ansehen.