Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. O. Venjakob
P. Barth

Étale Kohomologie und L-Funktionen

Wintersemester 2009/2010

Aufgabenblatt 5 13. November 2009

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

a) Für ein zusammenhängendes Schema X und eine Garbe F auf X_{et} definiere $M_f := lim_{\rightarrow} F(U)$ wobei U die galoisschen étalen Überlagerungen von X durchläuft. Zeige: Dies ist auf kanonische Weise ein stetiger diskreter Modul unter $\pi_1(X)$. Zeige außerdem: $F \mapsto M_F$ definiert einen Funktor von étalen Garben nach $\pi_1(X)$-Moduln.

b) Sei K ein Körper. Zeige: $\pi_1(Spec(K)) = Gal(K^{sep}/K)$, dabei ist K^{sep} ein separabler Abschluß von K. Was ist hier der Basispunkt?

c) Zeige: Für $X = Spec(K)$ ist der Funktor aus a) eine Äquivalenz von Kategorien. Folgere: Die étale Kohomologie eines Körpers kann man durch Galois-Kohomologie (d.h. Gruppenkohomologie von Galois Gruppen) beschreiben.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*

Sei R ein henselscher Ring und S eine endliche R-Algebra. (Def. siehe unten)

a) Zeige: Es gibt lokale R-Algebren $S_1, ...S_n$, so dass $S = \prod S_i$ als R-Algebra. Tipp: Betrachte erst den Fall $S = R[X]/(f)$ und führe den allgemeinen Fall darauf zurück.

b) Sei $k = R/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper von R. Folgere aus dem ersten Teil und der offensichtlichen Verallgemeinerung von Aufgabe 2a auf Blatt 4: Für henselsche Ringe induziert der Übergang zur abgeschlossenen Faser: $(X \to Spec(R)) \mapsto (X \times Spec(k) \to Spec(k))$ eine Äquivalenz der Kategorien der endlich étalen Morphismen nach $Spec(R)$ und der nach $Spec(k)$. Tipp: Um zu zeigen, dass die Abbildung $Hom_R(S, S') \to Hom_k(S \otimes k, S' \otimes k)$ surjektiv ist, betrachte zu einer Abbildung $g \in Hom_k(S \otimes k, S' \otimes k)$ den Morphismus $S' \otimes_R S \to S' \otimes_R k; (s', s) \mapsto s'g(s)$ und zeige, dass er einen Schnitt hat.

c) Falls R ein Integritätsbereich ist, beschreibe die Kategorie der endlichen étalen R-Algebren und gib $\pi_1(Spec(R))$ an. Zeige insbesondere: Ist S eine endliche étale R-Algebra mit $Spec(S)$ zusammenhängend, dann ist S ein Integritätsbereich.

Aufgabe 3. *(6 Punkte)*

a) Sei X ein noethersches Schema. Zeige: Sind die Vervollständigungen aller lokalen Ringe (am maximalen Ideal) Integritätsbereiche, und ist X zusammenhängend, so ist X irreduziebel.

b) Zeige: Ist K ein Zahlkörper, $\mathcal{O}_K$ sein Ganzzahlring und S eine endliche Menge von nicht archimedischen Primstellen. Dann bezeichnen wir mit $\tilde{S}$ die multiplikative Menge $\tilde{S} := \mathcal{O} - \cup_{\mathfrak{p} \notin S} \mathfrak{p}$. Wir setzen $\mathcal{O}_{K,S} := (\tilde{S}^{-1}\mathcal{O})$. Zeige:$Spec(\mathcal{O}_{K,S}) = Spec(\mathcal{O}) - S$.

c) Mit der Notation aus dem letzten Teil: Zeige: Wenn R eine endliche étale $\mathcal{O}_{K,S}$-Algebra ist mit $Spec(R)$ zusammenhängend, dann ist R in einem Ring der Form $\mathcal{O}_{K',S'}$ enthalten wobei K'/K eine endliche Körpererweiterung ist und S' die Primstellen von K' über S beschreibt. Zeige außerdem: Diese $\mathcal{O}_{K',S'}$ sind endlich étale über $\mathcal{O}_{K,S}$. Gibt $\pi_1(\mathcal{O}_{K,S})$ als Galoisgruppe an.

Definition. Ein lokaler Ring R mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper k heißt henselsch, falls das folgende gilt: Für ein normiertes $f \in R[X]$ betrachte die Reduktion $\overline{f} \in k[X] = (R/\mathfrak{m})[X]$ und nimm an: $\overline{f} = g'h'$ mit $g', h' \in k[x]$. Weiterhin seien g' und h' in $k[X]$ prim zueinander, dann gilt: Es gibt $g, h \in R[X]$ mit $gh = f$ und für die Reduktionen $\overline{()}$ modulo $\mathfrak{m}$ gilt: $\overline{g} = g'$ und $\overline{h} = h'$ in $k[X]$.

Lemma. Vollständige Ringe sind henselsch. (vgl. J.Neukich *Algebraische Zahlentheorie* II.4.6)