Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. O. Venjakob
P. Barth

Étale Kohomologie und L-Funktionen

Wintersemester 2009/2010

Aufgabenblatt 4 6. November 2009

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $f : Y \to X$ ein Morphismus vom endlichen Typ von noetherschen Schemata. Zeige: Ist $g : X_0 \to X$ eine abgeschlossene Immersion mit nilpotenter Idealgarbe, dann ist f genau dann etale, wenn die Projektion auf den zweiten Faktor $f_0 : Y_0 = Y \times_X X_0 \to X_0$ etale ist.
Tipp: Es könnte helfen, dass abgeschlossene Immersionen affin sind.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

a) Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein vollständiger noetherscher lokaler Ring. Sei darüber hinaus $f : Y \to X = Spec(A)$ ein Morphismus vom endlichen Typ, mit $f(y) = x$ für einen abgeschlossenen Punkt $y \in Y$ und den einzigen abgeschlossenen Punkt $x \in X$. Zeige: Induziert f einen Isomorphismus der Restklassenkörper von x und y und ist f etale, dann ist die Einschränkung von f auf eine geeignete Umgebung von y ein Isomorphismus.

b) Sei $f : Y \to X$ ein Morphismus vom endlichen Typ von noetherschen Schemata. Weiterhin sei $y \in Y$ und $x = f(y)$. Wir nehmen an, dass f einen Isomorphismus $f_y^* : k(x) \to k(y)$ der Restklassenkörper induziert. Zeige: Ist f etale in einer Umgebung von y, dann ist induzierte Abbildung der vervollständigten lokalen Ringe

$$\widehat{f_y^*} : \widehat{\mathcal{O}_{X,x}} := \varprojlim \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}_{Y,y}} := \varprojlim \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^n$$

ein Isomorphismus.

Bemerkung: In der Situation der zweiten Teilaufgabe gilt sogar "genau dann wenn", die Rückrichtung ist aber etwas schwieriger.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Seien nun X und Y Schemata vom endlichen Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und $f : Y \to X$ ein k-Morphismus vom endlichen Typ. In Algebraischer Geometrie 2 wurde für einen Punkt $x \in X$ der Tagentialraum $T_{X,x}$ an X als $T_{X,x} := Spec(Sym_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2))$ definiert. Hier ist $Sym_k(V)$ die symmetrische Algebra über einem k-Vektorraum V. Die k-wertigen Punkte von $T_{X,x}$ haben eine kanonische Bijektion mit den Elementen von $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Zusätzlich definieren wir den Tangentialkegel $C_{X,x}$ bei x an X als $C_{X,x} := Spec(gr\mathcal{O}_{X,x})$. Dabei bezeichnet

$$gr\mathcal{O}_{X,x} := \bigoplus_{i=0}^{\infty} gr_i(\mathcal{O}_{X,x}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}_x^i/\mathfrak{m}_x^{i+1}$$

den graduierten lokalen Ring. Offensichtlich gibt es einen surjektiven natürlichen Ringmorphismus von $Sym_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$ nach $gr\mathcal{O}_{X,x}$. Dieser induziert eine abgeschlossene Immersion von $C_{X,x}$ nach $T_{X,x}$.

a) Finde X, x mit X irreduzibel, s.d $C_{X,x}$ nicht isomorph zu $T_{X,x}$ ist, berechne in diesem Fall Tangentialraum und -kegel. Zeichne ein Bild, dass die Situation verdeutlicht.

b) Benutze die zweite Aufgabe inklusive meiner Bemerkung um zu zeigen: Das f vom Anfang ist etale genau dann wenn für alle abgeschlossenen Punkte y von Y mit $x = f(y)$ gilt: Die natürliche Abbildung $\widehat{f_y^*} : \widehat{\mathcal{O}_{X,x}} \to \widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$ ist ein Isomorphismus. Zeige außerdem: In diesem Fall induziert f einen Isomorphismus der Tangentialräume und -kegel, der mit der kanonischen Immersion der Tangentialkegel in die Räume verträglich ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Betrachte für einen Körper k die in $\mathbb{A}_k^2$ durch die Gleichung $y^2 = x^2(x-1)$ definierte Kurve C. Sie hat eine Singularität bei $(0,0)$ und ist nicht normal. Finde eine Etale Überlagerung C' von C vom Grad 2, so dass C' zwei irreduzible Komponenten hat, die beide isomorph zur Normalisierung von C sind. Male außerdem ein Bild, das die Situation veranschaulicht.