Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. O. Venjakob
P. Barth

Étale Kohomologie und L-Funktionen

Wintersemester 2009/2010

Aufgabenblatt 1 16. Oktober 2009

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Wir zeigen: $K[[T]] \cap L(T) \subset K(T)$. Sei dazu $f = \sum_i a_i T^i \in K[[T]]$ eine Potenzreihe.

a) Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen über f:

   i) $f \in K(T)$

   ii) Es gibt natürliche Zahlen n und d und nicht sämtlich verschwindende Elemente $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{k+i} = 0$ für alle $k > d$

   iii) Es gibt natürliche Zahlen n und d, so dass $Span_K\{A_i^{(n)} | i > d\} \neq K^n$ mit $A_i^{(n)} = (a_{i+1}, ..., a_{i+n})$.

b) Zeige: $K[[T]] \cap L(T) \subset K(T)$ mit Hilfe des ersten Teils.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Wir zeigen die folgende Funktionalgleichung für die Zeta-Funktion $Z(T)$ eines glatten projektiven Schemas X über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$:

$$Z(\frac{1}{q^n T}) = \pm q^{nE/2} T^E Z(T)$$

Dabei ist n die Dimension von X und $E = \sum_i (-1)^i \dim(H^i(X))$ die Eulercharakteristik bezüglich einer Weil-Kohomologie.

a) Sei K ein Körper und V, W zwei endlich dimensionale K-Vektorräume. Wir betrachten eine perfekte Paarung

$$< \cdot, \cdot >: V \times W \to K$$

und zwei Endomorphismen $\phi : V \to V$ und $\psi : W \to W$ mit $< \phi v, \psi w >= \lambda < v, w >$ für alle $v \in V$ und $w \in W$. Berechne den Zusammenhang von $\det(1 - \frac{\phi}{\lambda T}, V)$ und $\det(1 - \psi T, W)$.

b) Benutze, dass der Frobenius durch Multiplikation mit q^n auf $H^{2n}(X)$ operiert und die Beschreibung von $Z(T)$ aus der Vorlesung, um die Funktionalgleichung abzuleiten.

Aufgabe 3. *(6 Punkte)*
In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Kategorie der Modulgarben auf einem lokal geringten Raum genügend Injektive hat. Das heißt, dass jede Garbe injektiv in eine injektive Garbe abgebildet werden kann.

a) Zeige, dass divisible Gruppen (d.h. die Multiplikation mit natürlichen Zahlen ist surjektiv) injektive Objekte in der Kategorie der abelschen Gruppen sind. Folgere: Diese Kategorie hat genügend Injektive. Tipp: Weise die Fortsetzbarkeit von Morphismen nach.

b) Zeige: Ist T ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul, und A ein kommutativer Ring, dann ist $Hom_{\mathbb{Z}}(A, T)$ ein injektiver A-Modul. Folgere: Die Kategorie der A-Moduln hat genügend Injektive.

c) Sei nun $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Für einen Punkt $x \in X$ sei $j_x : x \to X$ die Inklusion und I_x ein injektiver Modul über dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$. Zeige: Die Garbe $\prod_{x \in X} j_{x,*}(I_x)$ ist injektiv und folgere: Die Kategorie der Modulgarben hat genug Injektive.