Aufabe 2

Eine endliche Gruppe G operiere auf einer endlichen Menge X und $G\backslash X$ bezeichne die Menge der Bahnen von X unter G.

a) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Bahnen gleich der durchschnittlichen Fixpunktanzahl ist, d.h.

$$|G\backslash X| = |G|^{-1} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_X(g)|$$

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_X(g)| &= \sum_{g \in G} |\{x \in X | gx = x\}| \\
&= \sum_{g \in G} |\{(g, x) \in G \times X | gx = x\}| \\
&= |\{(g, x) \in G \times X | gx = x\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{(g, x) \in G \times X | gx = x\}| \\
&= \sum_{x \in X} |G_x| \\
&= \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|} \qquad \text{(Bahnensatz)} \\
&= |G| \sum_{A \in G\backslash X} \sum_{x \in A} \frac{1}{|Gx|} \\
&= |G| \sum_{A \in G\backslash X} 1 \\
&= |G| \cdot |G\backslash X|
\end{aligned}$$

In der drittletzten Zeile summiert man über die Elemente jeder Bahn getrennt. Eine Bahn A hat $|Gx|$ Elemente mit $x \in A$ beliebig. Insbesondere ist $|Gx|$ für alle $x \in A$ gleich. Deshalb sind alle Summanden in der inneren Summe gleich und addieren sich zu 1.

b) Es sei eine Halskette mit neun Perlen gegeben, von denen jede einzelne in genau einer von drei verschiedenen Farben leuchtet. Jeweils drei Perlen haben dabei dieselbe Farbe und sind nicht voneienander zu unterscheiden.

Wieviele verschiedene Anordnungen von Perlen gibt es, wenn Anordnungen, die durch Drehungen rsp. Spiegelungen aus einer anderen hervorgehen, nicht von der Ursprünglichen unterschieden werden?

Man denke sich die Perlen durchnummeriert. Perlen 1,2,3 seien rot, Perlen 4,5,6 seien blau und Perlen 7,8,9 seien gelb. Eine Anordnung der Perlen ist durch ein Element von S_9 gegeben. Betrachte die Gruppe

$$G = D_9 \times S_3^{rot} \times S_3^{blau} \times S_3^{gelb}$$

Man denke sich die vier Faktoren folgendermaßen eingebettet in S_9:

$$\begin{aligned} S_3^{rot} &\cong \{id, (123), (132), (12), (13), (23)\} \\ S_3^{blau} &\cong \{id, (456), (465), (45), (46), (56)\} \\ S_3^{gelb} &\cong \{id, (789), (798), (78), (79), (89)\} \\ D_9 &\cong < (123456789), (29)(38)(47)(56) > \end{aligned}$$

G operiert wie folgt auf S_9:

$$(d, s) \cdot \sigma = d\sigma s^{-1} \qquad d \in D_9, s \in S_3^{rot} \times S_3^{blau} \times S_3^{gelb}, \sigma \in S_9$$

Das heißt sie permutiert jeweils die gelben, blauen und roten Perlen untereinander und dreht und spiegelt die Kette. Für die Multiplikation von rechts braucht man das Inverse von s, damit es eine Gruppenoperation ist. G operiert also auf der Menge S_9 der Anordnungen der Perlenkette so, dass die zueinander äquivalenten Anordnungen jeweils eine Bahn bilden. Die Anzahl der verschiedenen Anordnungen ist demnach die Anzahl der Bahnen und wir können die Formel aus Teil a) benutzen. Wir müssen noch herausfinden, welche Elemente in G enthalten sind und wieviele Fixpunkte diese haben. Falls $d\sigma s^{-1} = \sigma$, so haben d und s den gleichen Zykeltyp, denn sei $(a_1, \ldots, a_k)$ ein Zykel von s. Dann gilt:

$$\sigma(a_i) = d\sigma s^{-1}(a_i) = d\sigma(a_{i-1})$$

Das heißt d enthält den Zykel $(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k)$. Dies bildet offensichtlich die Zykel von s bijektiv auf die Zykel von d ab. In D_9 gibt es 6 Elemente vom Typ (9), 2 Elemente vom Typ $(3, 3, 3)$, 9 Elemente vom Typ $(1, 2, 2, 2, 2)$ und die Identität. Die einzigen Zykeltypen, die auch in $S_3^{rot} \times S_3^{blau} \times S_3^{gelb}$ vorkommen, sind $(3, 3, 3)$ (8 mal) und die Identität. Die Identität hat natürlich $|S_9| = 9!$ Fixpunkte. Sei $d = (147)(258)(369)$ und $s = (123)(456)(789)$. Wir wollen alle $\sigma \in S_9$ finden mit $d\sigma s^{-1} = \sigma$, also alle, für die gilt (siehe obige Formel):

$$d = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))(\sigma(4), \sigma(5), \sigma(6))(\sigma(7), \sigma(8), \sigma(9))$$

Für $\sigma(1)$ gibt es 9 Möglichkeiten. $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$ muss einer der drei Zykel (147),(258) oder (369)sein. Das heißt, damit sind auch $\sigma(2)$ und $\sigma(3))$ festgelegt. Für $\sigma(4)$ bleiben noch 6 Möglichkeiten, womit $\sigma(5)$ und $\sigma(6)$ festgelegt sind und für $\sigma(7)$ bleiben 3 Möglichkeiten und damit ist alles festgelegt. Es gibt also $9 \cdot 6 \cdot 3$ Fixpunkte für $d = (147)(258)(369)$ und $s = (123)(456)(789)$. Die anderen Fälle sind analog. Es gibt $2 \cdot 8$ verschiedene Elemente $(d, s) \in G$ mit d, s vom Zykeltyp $(3, 3, 3)$. Insgesamt ergibt die Formel aus Teil a)

$$|G \backslash S_9| = \frac{9! + 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3}{18 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = 94$$

Es gibt 94 verschiedene Anordnungen der Perlenkette.