

Übungen zur Algebra I

- 11. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2010/2011
abzugeben bis Donnerstag, den 20. Januar 2011 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

1 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

- a) Wieviele Elemente der Ordnung 7 hat die Gruppe, wenn G exakt 168 Elemente und keine echten Normalteiler $N \leq G$ hat?
- b) Die Gruppe G hat einen echten Normalteiler, wenn ihre Ordnung p^2q ist - wobei p, q verschiedene Primzahlen sein mögen.

1 . Lösung:

a) Es ist

$$168 = 8 \cdot 3 \cdot 7.$$

Die Anzahl der 7-Sylowgruppen mit $n_7 \equiv 1 \pmod{7}$ und $n_7 \nmid 168$ entweder 1 oder 8. Wäre sie 1, hätte man einen Normalteiler, was der Voraussetzung widerspräche, ergo ist $n_7 = 8$. In den 8 7-Sylowgruppen stecken je 6 Elemente der Ordnung 7, was insgesamt $6 \cdot 8 = 48$ ergibt. Der Schnitt zweier Sylowgruppen ist trivial, also wurde kein Element doppelt gezählt.

- b) Es ist $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ und $n_p \mid q$. Da q prim ist, gilt $n_p \in \{1, q\}$. Hätte die Gruppe keinen Normalteiler, wäre $n_p = 1$ ausgeschlossen, also $n_p = q \equiv 1 \pmod{p}$, insbesondere ist $p < q$. Zum anderen hat man $n_q \equiv 1 \pmod{q}$ und $n_q \mid p^2$, ist also in der Menge $\{1, p, p^2\}$ enthalten. Da p ein Teiler von $q-1$ ist, kann n_q nicht p sein. Es gilt nun, $n_q = p^2$ auszuschließen. Wäre dem so, so hätte man $p^2(q-1)$ Elemente der Ordnung q (dasselbe Argument wie oben) und die übrigen Elemente der Gruppe, das sind $p^2q - (p^2(q-1)) = p^2$ Stück hätten die Ordnung p, p^2 oder 1. Damit gäbe es jedoch nur 1 Gruppe der Ordnung p^2 , was im Widerspruch zu $n_p \neq 1$ steht.

2 . Aufgabe (6 Punkte):

Eine endliche Gruppe operiere auf einer endlichen Menge X und $G \setminus X$ bezeichne die Menge der Bahnen von X unter G .

- a) Zeigen Sie, daß die Anzahl der Bahnen gleich der durchschnittlichen Fixpunktanzahl ist, d.h.

$$|G \setminus X| = |G|^{-1} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|.$$

- b) Es sei eine Halskette mit neun Perlen gegeben, von denen jede einzelne in genau einer von drei verschiedenen Farben leuchtet. Jeweils drei Perlen haben dabei dieselbe Farbe und sind nicht voneinander zu unterscheiden. Wieviele verschiedene Anordnungen von Perlen gibt es, wenn Anordnungen, die durch Drehungen resp. Spiegelungen aus einer anderen hervorgehen nicht von der Ursprünglichen unterschieden werden?

3 . Aufgabe (6 Punkte):

Begründen Sie Wahrheit oder Irrtum der folgenden Aussagen:

- a) Jede Körpererweiterung vom Grad 6 ist normal.
- b) Ist $f \in K[X]$ ein separables Polynom mit $\text{Gal}(f) = S_4$, L/K dessen Zerfällungskörper, dann gibt es genau 4 Teilkörper Z vom Grad 8 über K .

c) Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ ist $X^3 + nX^2 + n \in \mathbb{Q}[X]$ stets irreduzibel.

2 . Lösung: a) Nein, z.B. ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2})$ über $\mathbb{Q}$ den Grad 6, ist aber nicht normal, da das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ von der Form $X^3 - 2$ ist, was in diesem Körper nicht vollständig zerfällt, da es imaginäre Nullstellen hat.

b) S_4 hat vier Untergruppen der Ordnung 3: Die von $(123), (124), (134)$ und (234) erzeugten Untergruppen. Diese induzieren nach dem Hauptsatz der Galoistheorie verschiedene Körpererweiterungen von Grad 8 über K . Weitere solche Erweiterungen kann es nicht geben, weil es keine weiteren Untergruppen der Ordnung 3 gibt.

c) Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ ist $X^3 + nX^2 + n = X^3 + X^2 + 1 \pmod{2}$ irreduzibel in $\mathbb{F}_2$ und damit irreduzibel in $\mathbb{Q}$.

4 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

a) Zeigen Sie, daß $4 + 2\sqrt{2}$ kein Quadrat in K ist.

Es sei fortan $L := \mathbb{Q}(\sqrt{4 + 2\sqrt{2}})$.

b) Berechnen Sie $[L : \mathbb{Q}]$ und das Minimalpolynom des Elements $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ über $\mathbb{Q}$ und K .

c) Zeigen Sie, daß $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ in L enthalten ist und $L/\mathbb{Q}$ eine Galoissche Erweiterung ist. Welche Galoisgruppe hat sie?

3 . Lösung:

Wir setzen $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\alpha = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, sowie $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Nun zeigen wir nacheinander, dass $[L : \mathbb{Q}] = 4$ ist (und somit $\alpha \notin K$), indem wir das Minimalpolynom bestimmen. Dann zeigen wir, dass $K/\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist und bestimmen die Galois-Gruppe.

Zuerst stellen wir fest, dass $(\alpha^2 - 4)^2 - 8 = 0$ gilt und folglich das Minimalpolynom von α das Polynom $f = (X^2 - 4)^2 - 8 = X^4 - 8X^2 + 8$ teilt. Nun ist $\bar{f} \in \mathbb{F}_3[X]$ irreduzibel, wie sich schnell nachrechnen läßt und damit $f \in \mathbb{Z}[X]$ irreduzibel, also $[L : \mathbb{Q}] = 4$. Da $[K : \mathbb{Q}] = 2$ gilt, ist offensichtlich $\alpha \notin K$ und somit auch nicht $\alpha^2 \in K$.

Wir können ferner sofort ablesen, dass die Nullstellen von f durch

$$\alpha, -\alpha, \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}, -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} =: \beta, -\beta$$

gegeben sind. Um zu zeigen, dass $L/\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist, reicht es also zu zeigen, dass $\beta \in L$ gilt.

Nun ist aber $\alpha\beta = \sqrt{(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = \alpha^2 - 4$ und damit $\beta = \frac{\alpha^2 - 4}{\alpha}$, also $\beta \in L$. Damit ist durch

$$\sigma : L \rightarrow L; \alpha \mapsto \beta$$

ein wohldefinierter $\mathbb{Q}$ -Automorphismus gegeben. Es ist

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{\left(\frac{\alpha^2 - 4}{\alpha}\right)^2 - 4}{\frac{\alpha^2 - 4}{\alpha}} = \frac{\frac{8}{\alpha^2} - 4}{\frac{\alpha^2 - 4}{\alpha}} = \frac{\frac{8}{\alpha} - 4\alpha}{\alpha^2 - 4} = \frac{8\left(-\frac{\alpha^3}{8} + \alpha\right) - 4\alpha}{\alpha^2 - 4} = \frac{-\alpha(\alpha^2 - 4)}{\alpha^2 - 4} = -\alpha$$

also hat σ mindestens Ordnung drei. Da die Galoisgruppe Ordnung vier hat, ist die Ordnung von σ genau vier und somit die Galoisgruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ via $\sigma \mapsto 1$.