Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2007/08

Seminar: Die Catalansche Vermutung

donnerstags, 14-16 Uhr, INF 288, HS 4 — Beginn: Oktober 2007

Anmeldung: ab sofort bei J. Bartels, Zi. 224, INF 288 — bartels@mathi.uni-heidelberg.de

In diesem Semester streben wir nach dem folgenden

Ziel

0.1 Satz (Catalan,Mihăilescu)**:** *Zwei aufeinander folgende Zahlen, welche nicht 8 und 9 sind, können niemals echte Potenzen sein, anders gesagt: die Gleichung*

$$x^p - y^q = 1,$$

deren Unbekannte positive ganze Zahlen sein mögen, hat nur eine Lösung.

Vortrag 1:
Anfangen wollen wir mit den Spezialfällen der Vermutung, bewiesen von V.A. Lebesgue und Chao Ko

0.2 Satz (Lebesgue)**:**

$$x^m - y^2 = 1 \text{ hat keine nichttriviale ganzzahlige Lösung.}$$

0.3 Satz (Chao Ko)**:**

$$x^2 - y^n = 1 \text{ hat keine ganzzahlige Lösung.}$$

Behandelt wird dies u.a. in [S], Abschnitte 2 bis 4.

Vortrag 2:
Hier soll die Rungesche Methode zur Lösung diophantischer Gleichungen erklärt werden. Unter anderem soll folgendes Ergebnis etabliert werden:

0.4 Satz: *Die einzigen ganzzahligen Lösungen der Gleichung*

$$y^2 = x^4 + x^3 + 1$$

sind die Tupel $(x, y) = (-2, \pm 3), (-1, \pm 1)$ *und* $(2, \pm 5)$.

s. [S], Abschnitt 5.

Vortrag 3:
Sollten wir in (x, y, m, n) eine Lösung der Catalanschen Gleichung haben, so gelten nach J.W.S. Cassels die folgenden Relationen:

0.5 Satz (Cassels)**:** *Es gibt ein $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und eine positive Zahl v, so daß*

$$x - 1 = p^{q-1}a^q, \ y = pav$$

und

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = pv^q$$

gilt.

Dies ist das Ziel dieses Vortrags; nachzulesen ist es in [S], Abschnitt 6.

Vortrag 4:
Ziel dieses Vortrags ist es, die Ergebnisse aus der Theorie der Kreisteilungskörper zusammenzutragen, damit wir gerüstet sind für die nächsten Kapitel. Unter anderem lernen wir hier die relative Klassenzahl h_p^- sowie eine sogenannte Hindernis-Gruppe kennen.
Referenz: [S], Abschnitt 7.

Vortrag 5:
Hier profitieren wir von dem vorangegangenen Vortrag:
Y. Bugeaud und G. Hanrot haben im Jahr 2000 ein Kriterium bewiesen, daß unter anderem die Endlichkeit der Anzahl der Lösungen der Catalanschen Gleichung beweist.
Hinreichend modifiziert von Mihăilescu wurde daraus der

0.6 Satz: *Sind p, q zwei Primzahlen, von denen wenigstens eine* 41 *nicht überschreitet, so hat die Catalansche Gleichung für diese Zahlen keine ganzzahligen Lösungen.*

Damit ist das Ziel dieses Vortrags formuliert.
Details finden sich in [S], Abschnitt 8.

Vortrag 6:
Es sei $G := Gal(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$.
Diese Gruppe sieht folgendermaßen aus: $G = \{\sigma_a : a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*\}$, wobei a durch $\sigma_a(\zeta_p) = \zeta_p^a$ modulo p definiert ist. Dann betrachten wir den zugehörigen Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ und das darin enthaltene Ideal I, welches von den Elementen

$$\theta_i := \sum_{i=1}^{p-1} \left[\frac{ia}{p}\right] \sigma_a^{-1}, \ i \in \mathbb{Z}$$

erzeugt wird. Nach Einführung dieses Ideals machen wir uns mit dessen Struktur vertraut:

0.7 Satz: *Ist $f_i := \theta_{i+1} - \theta_i$, dann sind die $f_i, i \leq \frac{p-1}{2}$ und das Element $T := \sum_{a=1}^{p-1} \sigma_a$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von I.*

Der Vortrag soll den Stoff bis Prop. 9.4. in [S], Abschnitt 9, behandeln.

Vortrag 7:
Mit den Vorarbeiten aus Vortrag 6 gehen wir an den

0.8 Satz (Stickelberger)**:** *Das Ideal I annulliert die Klassengruppe von* $\mathbb{Q}(\zeta_p)$*,*

der das eine Hauptziel dieses Vortrags sein wird.
Einen wichtigen Baustein im Beweis unseres Seminarziels stellt das sogenannte Doppel-Wieferich-Kriterium dar, um das es in diesem Vortrag gehen soll:

0.9 Satz (Mihăilescu)**:** *Sind* p, q *ungerade Primzahlen und genügen die ganzen Zahlen* $x, y \neq 0$ *der Gleichung* $x^p - y^q = 1$*, dann hat man*

$$p^{q-1} \equiv 1 (mod\, q^2) \text{ und } q^{p-1} \equiv 1 (mod\, p^2)$$

s. [S], Abschnitte 9 und 10.
Vortrag 8:
Mithilfe des sogenannten Minusarguments zeigte Mihăilescu den

0.10 Satz (Mihăilescu)**:** *Sind* p, q *Primzahlen, die einer der Gleichungen*

$$q > 4p^2 \text{ oder } p > 4q^2$$

genügen, dann hat die Catalansche Gleichung für solche p, q *keine nichttriviale Lösung.*

Gegenstand dieses Vortrags ist der Abschnitt 11 aus [S].
Vortrag 9:
In Fortsetzung von Vortrag Nr. 8 führen wir hier das sogenannte Plus-Argument ein.
Auch wird die Hindernis-Gruppe aus dem 4. Vortrag wieder auftauchen, die wir hier nun genauer verstehen wollen.
Literatur: Abschnitt 12 in [S].
Vortrag 10:
Dies ist ein weiterer Vortrag, der uns strukturellen Hintergrund liefert, behandelt werden sollen Elemente aus der Theorie der halbeinfachen Gruppenringe, welche dann in der folgenden Aussage ihren Höhepunkt finden sollen:

0.11 Satz: *Für eine ungerade Primzahl* p*,* $G^+ := Gal(\mathbb{Q}(\zeta_p + \overline{\zeta_p})/\mathbb{Q})$ *und eine Primzahl* q*, welche den Term* $p(p-1)$ *nicht teilt, hat die Gruppe* E_p *der* $p-$*Einheiten von* $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ *die folgende Eigenschaft:* E_p/E_p^q *ist ein freier* $\mathbb{F}_q[G^+]-$*Modul vom Rang 1.*

Behandelt wird dies in Abschnitt 13 von [S].
Vortrag 11:
Ein zweiter Vortrag über das Plus-Argument ist nötig zum Beweis von

0.12 Satz (Mihăilescu)**:** *Sind* p, q *ungerade Primzahlen und* $x, y \neq 0$ *ganze Zahlen, die die Gleichung Catalans erfüllen, so gilt entweder*

$$q \equiv 1 (mod\, p) \text{ oder } p \equiv 1 (mod\, q).$$

Der Umfang dieses Vortrags erstreckt sich auf den Abschnitt 14 von [S].

Vortrag 12:
Dieser Vortrag behandelt den folgenden tiefliegenden Satz aus der Algebraischen Zahlentheorie:

0.13 Satz (Tschebotareff)**:** *Ist F/K eine endliche Galoissche Erweiterung des Zahlkörpers K, $G := Gal(F/K)$ und C eine Konjugationsklasse aus G, dann ist die sog. Dichte aller Primideale, deren Frobeniuskonjugationsklasse C ist, gegeben durch den Bruch*

$$\frac{\sharp C}{\sharp G}.$$

Ziel ist es, ihn anhand von [S], Abschnitt 15 ohne Klassenkörpertheorie zu beweisen und die nötigen Begriffe dazu zu erläutern.
Vortrag 13:
Gegenstand des Vortrags ist der wichtige

0.14 Satz (Thaine)**:**
Es seien p, q ungerade Primzahlen mit $q \not| (p-1), G^+ := Gal(\mathbb{Q}(\zeta_p + \overline{\zeta_p})/\mathbb{Q})$ und E die Einheitengruppe der Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_p + \overline{\zeta_p})/\mathbb{Q})$. C sei die Gruppe der zyklotomischen Einheiten aus $\mathbb{Q}(\zeta_p + \overline{\zeta_p})$. Wenn $\theta \in \mathbb{Z}[G^+]$ die Gruppe E/CE^q annulliert, dann annulliert θ auch $Cl^+/(Cl^+)^q$.

Neben der Erläuterung der oben noch nicht definierten Begriffe wird der Beweis, der sich im Abschnitt 16 von [S] befindet, den zentralen Teil dieses Vortrags darstellen.
-Achtung! Klassenkörpertheorie wird ein bißchen gebraucht!-
Vortrag 14:
In diesem Vortrag wird es darum gehen, die Bausteine der vorangegangenen Vorträge zusammenzusetzen und aus den oben aufgeführten drei Sätzen von Mihăilescu die Catalansche Vermutung zu folgern. Der Vortragende sollte hier, wo alle Fäden zusammenlaufen, den roten Faden im Beweis deutlich herausarbeiten.
Quelle: [S], Abschnitt 1 und alle anderen.

Literatur

[S] Schoof, Catalans Conjecture