

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

- 6. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg

WS 2009/2010

J. Bartels

abzugeben bis Donnerstag, den 26. November 2009 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

<http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung>

Name: /name/ Matrikelnummer: /nr/
Übungsleiter: /uebleiter/
2. Name: /namezwei/ 2. Matrikelnummer: /nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					

1 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes irreduzibles Polynom mit Nullstelle α . K sei der durch Adjunktion von α aus \mathbb{Q} hervorgehende Zahlkörper. Weiter sei $k \in \mathbb{Z}$ gegeben. Zeigen Sie

a)

$$N_{K/\mathbb{Q}}(k - \alpha) = f(k).$$

b) Es gibt genau dann einen Primteiler $\mathfrak{p}|p$ mit $\mathfrak{p}|(k - \alpha)$, wenn $p|f(k)$ gilt.

In diesem Fall ist $\mathfrak{p} = (p, k - \alpha)$ und hat den Restklassengrad $f(\mathfrak{p}/p) = 1$.

2 . Aufgabe (6 Punkte):

Berechnen Sie die Klassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{1141})$. Hinweis: Minkowskischanke (2. Aufgabe vorletztes Blatt) und 1. Aufgabe.

3 . Aufgabe (6 Punkte):

Zeigen Sie, daß der Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ faktoriell ist und die Zahlen $n^2 - n + 41$ für ganze n in $-40 < n < 41$ Primzahlen sind.

4 . Aufgabe (6 Punkte):

Folgern Sie aus den 4. Aufgaben der vorangegangenen Zettel den folgenden Satz:

0.0.1 Satz: *Ist K ein quadratischer Zahlkörper der Diskriminante $D < 0$, dann sind die Idealklassen aus \mathcal{O}_K in Bijektion mit den Tripeln (a, b, c) , so daß $b^2 - 4ac = D$, $|b| \leq a \leq c$ und $b \geq 0$, wenn $|b| = a$ oder $a = c$.*