

Übungen zur Algebra I

- 5. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2008/2009
abzugeben bis Dienstag, den 11. November 2008 um 9:15 Uhr

<http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung>

Name: /name/

Matrikelnummer: /nr/

Übungsleiter: /uebleiter/

2. Name: /namezwei/

2. Matrikelnummer: /nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					

1 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei k ein Körper und $A := k[X, Y]/(X^2 + 5Y^2)$. Ist der Ring A

- nullteilerfrei?
- ohne nilpotente Elemente, (d.h. es gibt kein $a \in A \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = 0$)?
- faktoriell?

Geben Sie gegebenenfalls Bedingungen an den Körper k an, unter denen die Antwort anders lauten würde.

2 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ gegeben, so daß

$$f(X) \equiv X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2 \pmod{3}$$

$$f(X) \equiv X^4 + 2X^2 + 2 \pmod{5}$$

$$f(X) \equiv X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \pmod{2}$$

gilt.

a) Sind die Polynome aus $\mathbb{F}_p[X]$, $p \in \{3, 5, 2\}$ der rechten Seite irreduzibel?

b) Wie kann $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ dann nur aussehen?

3 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei p eine Primzahl, $K := \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$ und $L := \mathbb{F}_p(X, Y)$.

a) Was ist $[L : K]$?

b) Wieviele Zwischenkörper gibt es?

c) Ist die Körpererweiterung einfach?

4 . Aufgabe (6 Punkte):

Finden Sie die Minimalpolynome von

a) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{2}$, $\sqrt[5]{7}$ und $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$ über \mathbb{Q} .

b) $\zeta_5 := \exp(2\pi i/5) \in \mathbb{C}$ über \mathbb{Q} , $\mathbb{Q}(i)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.