UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 5. Juni 2023

ANALYSIS II
ÜBUNGSAUFGABEN 8

DEADLINE: Fr. 16. 6. 2023, 16:00.

1. Eine *Kurve in Polarkoordinaten* $r = f(\phi)$, $\phi \in [a, b]$, ist eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ der Gestalt
$$\gamma(\phi) = (f(\phi)\cos\phi, f(\phi)\sin\phi),$$
mit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ.
   (a) Zeigen Sie: Ist f C^1, dann ist die Länge einer Kurve in Polarkoodinaten gegeben durch
$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(f(\phi))^2 + (f'(\phi))^2} d\phi.$$
   (b) Berechnen Sie die Länge der sog. *Kardioide*
$$r = a(1 + \cos\phi),\ \ \phi \in [0, 2\pi],\ \ a > 0 \text{ fest.}$$
2. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve in Polarkoordinaten $r = e^{\phi}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral
$$\int_\gamma (xdy - ydx).$$
3. Auf dem 3. Übungsblatt betrachteten wir die Schraubenkurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,
$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ht),\ \ r, h > 0.$$
Berechnen Sie die Integrale
$$\int_\gamma ((x^2 - y^2)dx + 3zdy + 4xydz),\ \ \int_\gamma (x^4 + y^4 + z^4)ds.$$
Das erste der beiden Integrale ist die Arbeit, die vom Kraftfeld $F = (x^2 - y^2, 3z, 4xy)$ bei Verschiebung eines Massepunktes (mit Masse 1) entlang der Schraubenkurve γ geleistet wird.
4. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve. Die zweite Ableitung γ'' besitzt die physikalische Interpretation des *Beschleunigungsvektors*, da sie das Änderungsverhalten des Geschwindigkeitsvektors γ' beschreibt. Nach dem Newtonschen Kraftgesetz bewegt sich ein Punkt der Masse m unter dem Einfluss eines beliebigen Kraftfelds $F = (F_1, \dots, F_n)$ so, dass immer
$$F(\gamma(t)) = m\gamma''(t)$$

gilt. ("Kraft ist Masse mal Beschleunigung.") Berechnen Sie die Arbeit, die das Kraftfeld leistet, wenn es den Punkt entlang γ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ bewegt. Das Ergebnis lässt sich durch die sog. *kinetische Energie* des Punktes ausdrücken.