UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 5. Juni 2023

ANALYSIS II
ÜBUNGSAUFGABEN 7

DEADLINE: Mo. 12. 6. 2023, 16:00.

1. Wir identifizieren die Menge $M_n(\mathbb{R})$ aller reellen $n \times n$-Matrizen (x_{ij}) mit dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^{n^2}$ mit Koordinaten $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}$. Zeigen Sie, dass die spezielle lineare Gruppe
$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$
eine Untermannigfaltigkeit von $M_n(\mathbb{R})$ der Kodimension 1 ist.
2. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus und $M \subset U$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Beweisen Sie:
   (a) $f(M)$ ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.
   (b) Sei $p \in M$ ein beliebiger Punkt. Dann ist das Bild des Tangentialraums T_pM unter dem Differential $(Df)(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gerade der Tangentialraum $T_{f(p)}f(M)$.
3. Benutzen Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren, um den kürzesten Abstand zwischen der Ellipse $x^2 + 2y^2 = 6$ und der Geraden $x + y = 5$ zu ermitteln. Warum definieren die Nebenbedingungen eine Untermannigfaltigkeit?
4. Finden Sie Minimum und Maximum von $x^2 - xy + y^2 - z^2$ auf dem vollen Ellipsoid $\{(x, y, z) \mid 3x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 4\}$.
   Hinweis: Gehen Sie in zwei Schritten vor. Bestimmen Sie zunächst lokale Extrema auf der offenen Menge $\{(x, y, z) \mid 3x^2 + 3y^2 + z^2 < 4\}$. Benutzen Sie dann die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren, um die lokalen Extrema unter der Nebenbedingung $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 4$ zu bestimmen.