UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 25. Mai 2023

ANALYSIS II
ÜBUNGSAUFGABEN 6

DEADLINE: Fr. 2. 6. 2023, 16:00.

1. Sei $F(x,y,z) = x^4 + 2x\cos y + \sin z$. Zeigen Sie, dass für hinreichend kleine x, y, z die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ nach z aufgelöst werden kann und berechnen Sie für die Lösungsfunktion $z(x,y)$ die partiellen Ableitungen $\partial z/\partial x$ und $\partial z/\partial y$.

2. Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} -2xy + u^2 + v^2 &= 0 \\ x^3 - y^3 + u^3 + v^3 &= 0 \end{aligned}$$
in einer Umgebung des Punktes $(x,y,u,v) = (1,1,1,-1)$ die Variablen x, y implizit als Funktionen $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ von u, v definiert. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von $x(u,v)$ und $y(u,v)$.

3. Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A. Wir sagen λ ist ein *einfacher* Eigenwert, wenn $\dim\ker(A - \lambda I) = 1$ und $\ker(A - \lambda I) = \ker(A - \lambda I)^2$ ist. Sei $A(t) = (a_{ij}(t))$ eine Familie von linearen Abbildungen $A(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit allen a_{ij} stetig differenzierbar und definiert auf einer offenen Umgebung von $t = 0$ in $\mathbb{R}$. Beweisen Sie: Ist $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ein einfacher Eigenwert von $A(0)$, dann existiert eine Umgebung U von $t = 0$ in $\mathbb{R}$, sodass $A(t)$ für jedes $t \in U$ einen reellen Eigenwert besitzt.
Hinweis: Sei x_0 ein normierter Eigenvektor von $A(0)$ zu λ_0. Wenden Sie den Satz über implizite Funktionen auf die Abbildung $F(x,\lambda,t) = (A(t)x - \lambda x, \langle x, x_0\rangle - 1)$, definiert auf einer Umgebung von $(x_0, \lambda_0, 0)$ in $\mathbb{R}^{n+2}$, an.

4. Zeigen Sie:
   (a) Sei V ein Banachraum, $\varnothing \neq A \subset V$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\phi : A \to A$ eine Abbildung. Ist eine der iterierten Abbildungen $\phi^n : A \to A$ eine Kontraktion, dann hat ϕ einen eindeutigen Fixpunkt. Dieser kann durch Iteration von ϕ, ausgehend von einem beliebigen Startpunkt, gefunden werden.
   (b) Die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = e^{-x}$, ist keine Kontraktion auf $\mathbb{R}$, aber $\phi \circ \phi$ *ist* eine Kontraktion auf $\mathbb{R}$.
   (c) Approximieren Sie die Lösung der Gleichung $e^{-x} = x$, wobei der Approximationsfehler < 0.01 sein soll.
   Hinweis: Der Fehler kann abgeschätzt werden durch
$$\|x_n - \xi\| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\|x_0 - \phi(\phi(x_0))\|,$$

wobei x_0 der Startwert, x_n der Wert der n-ten Iteration von $\phi \circ \phi$, ξ der Fixpunkt und $\lambda < 1$ die Kontraktionskonstante ist.