UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 17. Mai 2023

ANALYSIS II
ÜBUNGSAUFGABEN 5

DEADLINE: Fr. 26. 5. 2023, 16:00.

1. Berechnen Sie die Richtungsableitungen der folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen in die angegebenen Richtungen v. (Bem.: Ist $||v|| \neq 1$, muss v erst normiert werden!)
   (a)
   $$f(x,y) = \sin(xy),\ (x,y) = (1,0),\ v = (1/2, \sqrt{3}/2).$$
   (b)
   $$f(x,y,z) = x^2 + ze^y,\ (x,y,z) = (0,0,1),\ v = (1,0,1).$$
2. Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei in $x \in U$ differenzierbar. Zeigen Sie: Der Gradient gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von f an, und seine Norm ist gerade dieser stärkste Anstieg. Genauer ist also folgendes zu zeigen: Ist $\nabla f(x) = 0,$ so verschwinden alle Richtungsableitungen in x. Ist aber $\nabla f(x) \neq 0,$ dann gibt es unter allen Richtungsableitungen $(\partial_v f)(x)$, $||v|| = 1,$ eine größte, nämlich die Ableitung in Richtung $v = \nabla f(x)/||\nabla f(x)||$ des Gradienten. Ihr Wert ist $||\nabla f(x)||$.
3. Bestimmen Sie die quadratische Taylor-Approximation der Funktion
   $$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x-y}{x+y},$$
   im Mittelpunkt $(x,y) = (1,1)$.
4. Bestimmen Sie Lage, Art und Größe aller lokalen Extrema der folgenden Funktionen:
   (a) $f : U \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y),\ U = \{(x,y) \mid 0 < x, y, x+y < \pi\}.$
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$