UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 11. Mai 2023

ANALYSIS II
ÜBUNGSAUFGABEN 4

DEADLINE: Fr. 19. 5. 2023, 16:00.

1. Sei
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\partial_1\partial_2 f(0,0)$, $\partial_2\partial_1 f(0,0)$ nicht übereinstimmen. Warum ergibt sich kein Widerspruch zum Satz von Schwarz?

2. (a) Besitzt das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$V(x,y,z) = (x^2 + xy, \tfrac{1}{2}x^2 + y + z, 2y),$$
ein Potential? Beweisen Sie Ihre Antwort.

   (b) Für welche Wahl der Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$V(x,y,z) = (x^2 + xy, \tfrac{1}{2}x^2 + y + az, by),$$
rotationsfrei (d.h. $\operatorname{rot}(V) = 0$)?

3. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin((x^2+y^2)^{-1/2}), & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
im Nullpunkt (total) differenzierbar ist, dass aber ihre beiden partiellen Ableitungen im Nullpunkt unstetig sind.

4. Sei $f(u,v) = \log(u^2+v^2)$ für $(u,v) \neq 0$ und $g(x,y) = (xy, \sqrt{x}/y)$ für $x, y > 0$. Für $F = f \circ g$ gilt $(x, y > 0)$:
$$F(x,y) = \log\left(x^2y^2 + \frac{x}{y^2}\right).$$
Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von F zunächst direkt aus obiger Formel, dann mit Hilfe der Kettenregel, indem Sie die Jacobi-Matrizen von f und g berechnen.