UNIVERSITÄT HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Institut für Mathematik
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 7. Mai 2025

DIFFERENTIALTOPOLOGIE II
ÜBUNGSAUFGABEN 3

DEADLINE: Mi. 14. Mai 2025, 15:00.

1. Wir konstruieren eine Kurve $c(h)$ wie folgt. Gegeben seien zwei Vektorfelder X, Y auf einer Mannigfaltigkeit M und ein Punkt $p \in M$. Folge der Integralkurve von X durch p für eine Zeit h, folge dann der Integralkurve von Y für Zeit h, dann der Integralkurve für X rückwärts für Zeit h und schließlich der Integralkurve von Y rückwärts für Zeit h. Mit anderen Worten,
$$c(h) = \psi_{-h}(\phi_{-h}(\psi_h(\phi_h(p)))),$$
wobei ϕ der Fluss von X und ψ der Fluss von Y ist. Diese Kurve steht in engem Zusammenhang mit der Lie-Klammer $[X, Y]$. Beweisen Sie, dass $c'(0) = 0$.
Hinweis: Definieren Sie
$$\begin{aligned} \alpha_1(t,h) &= \psi_t(\phi_h(p)), \\ \alpha_2(t,h) &= \phi_{-t}(\psi_h(\phi_h(p))), \\ \alpha_3(t,h) &= \psi_{-t}(\phi_{-h}(\psi_h(\phi_h(p)))). \end{aligned}$$
Für eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, erfüllt $f \circ \alpha_1$ die Differentialgleichung
$$\frac{\partial(f \circ \alpha_1)}{\partial t} = Yf \circ \alpha_1.$$
Stellen Sie analog DGL für α_2 und α_3 auf. Berechnen Sie dann $(f \circ c)'(0)$ mit Hilfe der Kettenregel.
2. Da für die Lie-Ableitung $L_X Y$ die Formel $L_X Y = [X, Y]$ gilt, folgt sofort $L_X X = 0$, sowie $(L_X Y)(p) = 0$, wenn $X(p) = 0 = Y(p)$. Beweisen Sie diese beiden Folgerungen *direkt* aus der Limes-Definition von $L_X Y$.
3. Sei X ein Vektorfeld mit Fluss ϕ_t und Y ein Vektorfeld mit Fluss ψ_t. Zeigen Sie: $[X, Y] = 0$ genau dann, wenn $\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t$ für alle s, t.