UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 5. Mai 2023

ANALYSIS II
ÜBUNGSAUFGABEN 3

DEADLINE: Fr. 12. 5. 2023, 16:00.

1. Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Bijektion. Ist X kompakt und Y Hausdorffsch, dann ist f ein Homöomorphismus.
2. Zeigen Sie, dass jeder kompakte metrische Raum vollständig ist.
3. (a) Seien r, h positive reelle Zahlen. Die Kurve $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,
$$f(t) = (r\cos t, r\sin t, ht),$$
beschreibt den Weg, den ein Massepunkt auf der Peripherie einer kreiszylindrischen Schraube mit Radius r und Ganghöhe $2\pi h$ beim Drehen der Schraube zurücklegt, wobei der Punkt sich zu Beginn der Bewegung auf der x_1-Achse befindet; die Schraube wird einmal vollständig gedreht. Der Tangentialvektor $f'(t)$ besitzt die physikalische Interpretation als Geschwindigkeitsvektor im Zeitpunkt t, seine Norm (Länge) ist die Geschwindigkeit. Bestimmen Sie Geschwindigkeitsvektor und Geschwindigkeit des Massepunktes.

   (b) Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Doppelpunkt* einer Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall), wenn es $t, t' \in I$, $t \neq t'$, gibt mit $f(t) = x = f(t')$. Bestimmen Sie die Doppelpunkte der Kurve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$. Bestimmen Sie alle Tangentialvektoren in diesen Doppelpunkten.
4. (a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen (erster Ordnung) der Funktionen
$$f(x, y, z) = xyz\sin(x + y + z), \; g(x, y, z) = \frac{xe^{2y}}{z} \; (z \neq 0).$$

   (b) Für ein ideales Gas mit Druck P, Volumen V und absoluter Temperatur T gilt die Zustandsgleichung $PV = cT$ (c eine Konstante). Zeigen Sie, dass für ein solches Gas die Beziehung
$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$
besteht. (Bem.: der Wert ist also nicht 1, auf den man durch "Kürzen" kommen würde!)