UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 28. April 2023

# ANALYSIS II
# ÜBUNGSAUFGABEN 2

**DEADLINE:** Fr. 5. 5. 2023, 16:00.

1. Seien $X, Y$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.
   (a) Zeigen Sie: $f$ ist stetig genau dann, wenn $f$ in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.
   (b) Zeigen Sie: $f$ ist stetig genau dann, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in $X$ ist.
2. Beweisen Sie, dass jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig ist.
3. (a) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Beweisen Sie, dass der Vektorraum
   $$C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\},$$
   ausgestattet mit der Supremumsnorm $||f||_\infty$, vollständig ist.
   (b) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $A : C[a, b] \to \mathbb{R}$,
   $$A(f) := \int_a^b f(x)dx,$$
   stetig ist.
4. Geben Sie eine offene Überdeckung des Intervalls $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ an, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.