UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 21. April 2023

ANALYSIS II
ÜBUNGSAUFGABEN 1

DEADLINE: Fr. 28. 4. 2023, 16:00.

1. Beweisen Sie, dass die Menge aller Folgen $x = (x_n)$, $x_n \in \mathbb{R}$, ein metrischer Raum wird durch
$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$
2. (a) Zeigen Sie: In einem metrischen Raum ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig durch die Folge bestimmt.
   (b) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung von* x, wenn es eine offene Menge $V \subset X$ gibt mit $x \in V \subset U$. Sei $(x_n) \subset X$ eine Folge von Punkten. Wir sagen (x_n) *konvergiert* gegen $x \in X$, wenn zu jeder Umgebung $U \subset X$ von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass der Grenzwert in topologischen Räumen nicht eindeutig sein muss. Wie verhält sich das, wenn man das Hausdorffaxiom annimmt?
3. Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $d_{X\times Y}$ die Abbildung
$$d_{X\times Y} : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)).$$
   Zeigen Sie, dass $d_{X\times Y}$ eine Metrik auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ definiert. Beweisen Sie, dass eine Teilmenge $U \times V \subset X \times Y$ offen bezüglich $d_{X\times Y}$ ist genau dann, wenn U offen in X und V offen in Y ist.
4. Sei $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ die Menge aller Polynome in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit komplexen Koeffizienten. Ist $S = \{f_1, \ldots, f_r\} \subset R$ irgendeine endliche Teilmenge, dann setzen wir
$$\langle S \rangle = \{a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r : a_i \in R\}.$$
   Definiere eine Teilmenge $V(\langle S \rangle) \subset \mathbb{C}^n$ durch
$$V(\langle S \rangle) = \{p \in \mathbb{C}^n : f(p) = 0 \text{ für alle } f \in \langle S \rangle\}.$$
   Sei $\mathcal{T}$ die Menge
$$\mathcal{T} = \{\mathbb{C}^n - V : V = V(\langle S \rangle) \text{ für ein } S \text{ wie oben}\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{C}^n$ ist. *Hinweis:* Sie dürfen die algebraische Tatsache verwenden, dass für eine gegebene Familie $\{S_\alpha\}$, die Menge

$$\{g_1 + \ldots + g_k : g_i \in \langle S_{\alpha_i} \rangle \text{ für ein } \alpha_i\}$$

gleich $\langle S \rangle$ für eine endliche Teilmenge $S \subset R$ ist.

(b) Beschreiben Sie alle abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{C}^1, \mathcal{T})$.