Proseminar

Streifzüge durch die Mathematik

Anna Schilling

Wintersemester 2026/27

Dies ist eine Sammlung möglicher Themen für die Vorträge. Jedes Thema ist geeignet für einen etwa 80-Minütigen Vortrag, gehalten von 2 Personen. Die Themen müssen nicht in dieser Reihenfolge vorgestellt werden, die jeweiligen Vorträge eines Themenblocks sollten aber hintereinander kommen.

Die Vorträge werden am Montag, 19.10.2026, verteilt.

Themenblock Zahlen

Hilberts Hotel

- Bijektion von Mengen (injektiv, surjektiv, bijektiv) und Abzählbarkeit
- Hilberts Hotel: Aufbau des Hotels und Verhalten des Portiers (1 Gast - endlich viele Gäste - ein unendlicher Bus - unendliche viele Busse...); Jeweils mit der Abbildung und Interpretation
- Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ mit Cantors erstem Diagonalargument (evtl. Calkin-Wilf-Aufzählung)
- Wen kann das Hotel nicht mehr aufnehmen? Cantors Diagonalverfahren und Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ mit Cantors zweitem Diagonalargument

Literatur:

[AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise, Kap. 19 (teilweise)*. Springer-Verlag, 5. Auflage, 2018. Link: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57767-7`

[Spektrum] *Cantors Diagonale* (S.48/49) und *Das Hotel Hilbert* (S. 76ff.) aus Spektrum der Wissenschaft Spezial: Unendlich (plus eins), 2/2005.

[Sz] Kinga Szücs: *Hilbert und das unendliche Hotel - Wie schwierig ist eigentlich die Arbeit eines Hotelportiers?* und *Jenseits der Abzählbarkeit*. Kapitel 6 und 9 in M. Müller (Hrsg.): *Überraschende Mathematische Kurzgeschichten*. Springer Verlag, 2017.

Verschiedene Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen

Mehrere Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen aus verschiedenen Bereichen der Mathematik (u.a. Zahlentheorie, Gruppentheorie, Topologie, Analysis)

Literatur:

[AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise, §1* (ohne Anhang). Springer-Verlag, 5. Auflage, 2018. Link: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57767-7`

Die Fibonacci-Zahlen

- Rekursive Definition der Fibonacci-Zahlen
- Beweise einiger Identitäten (z.B. Summenformeln, Teilbarkeitsregeln, Zusammenhang zwischen verschiedenen Folgengliedern) mit verschiedenen Beweismethoden (indirekt, induktiv, kombinatorisch)
- Vorkommen (Überdeckung von Kästchen, Kaninchenpopulation, Natur)
- Explizite Form und Zusammenhang zum goldenen Schnitt

Literatur:

[BQ] Arthur T. Benjamin, Jennifer J. Quinn: *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof* . The Mathematical Association of America (Incorporated), 2003. ISBN: 978-1-61444-208-0

[Cut-Knot] Webseite Cut the knot: `https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/combinatorics/FibonacciTilings.shtml`

Themenblock Invarianten

Knotentheorie

- Invarianten und deren Bedeutung
- Definition mathematischer Knoten und Knotenprojektionen
- Reidemeisterbewegungen und ambiente Isotopie
- Verschlingungszahl ist eine Knoteninvariante (mit Beweis) und Beispiel (siehe [Co, Kap. 1.4])
- Dreifärbbarkeit ist eine Knoteninvariante (mit Beweis) und Beispiel (siehe [Co, Kap. 1.5])
- Das Bracket- und das Jones-Polynom: Definition und kurze Beispielrechnung für das Bracket-Polynom (siehe [Co, Kap. 6.1])

Literatur:

[Co] Colin C. Adams: *The Knot Book. An elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. American Mathematical Society, 2004.

Euler-Charakteristik

- Was ist die Idee hinter der Topologie (insb. der topologischen Äquivalenz)?
- Euler-Charakteristik für planare Graphen
- Euler-Charakteristik für Polyeder (über stereographische Projektion)
- Euler-Charakteristik als Invariante
- Anwendungen (z.B. Platonische Körper, Brussels Sprouts)
- Die Euler-Charakteristik von Flächen (durch Verkleben von Polygonen oder Graphen auf Flächen)

Literatur:

[Be] Stephan Berendonk: *Erkundungen zum Eulerschen Polyedersatz, §3.1.2.* Springer Spektrum Wiesbaden, 2014.

[AF] I. Agricola, T. Friedrich: *Elementargeometrie, §2.5.3, 2.5.4.* Vieweg+ Teubner Verlag Wiesbaden, 2005.

[Ei] Michael Eisermann: *Grundlagen der Topologie, §A0, A6* Fassung vom 15. Mai 2023. `https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/igt/eiserm/lehre/Topologie/Topologie-1.pdf`

[LKK] Alexander Engel: *Der Eulersche Polyedersatz.* Kapitel 12 aus C.Löh, S. Krauss, N. Kilbertus (Hrsg.): Quod erat knobelandum. Springer Spektrum, 2019.

[Re] Renzo's Math 490 *Introduction to Topology, S. 75 um Fig. 4.22, §. 4.5.* 2007. `https://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topology14/Notes.pdf`

[Workshop] Materialien zum Workshop "Die Euler-Charakteristik und Geometrie"(Alexandra Fuchs, Anna Schilling). Universität Heidelberg, 2022.

[Video] Jos Leys: *From an Octagon to a Genus 2 Surface*, 2015. `https://www.youtube.com/watch?v=G1yyfPShgqw`

$\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und Hilberts 3. Problem

- Das Lemma von Zorn
- Existenz einer Basis von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum (nach [Ma])
- Hilberts 3. Problem und die Begriffe dazu
- Dehn-Invarianten
- Gegenbeispiel zu Hilberts 3. Problem

Literatur:

[AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise, §10.* Springer-Verlag, 5. Auflage, 2018. Link: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57767-7`

[Fo] Oliver Fortmeier: *Hilberts drittes Problem.* Proseminar-Ausarbeitung, `http://www.matha.rwth-aachen.de/lehre/SS01/ana3proseminar/hilberts3.problem.pdf`

[Go] Sebastian Goette: *Lineare Algebra - WS 2016/17, §7.4.* Skript zur Vorlesung, Universität Freiburg. `https://home.mathematik.uni-freiburg.de/goette/Skripten/LA.pdf`

[Ma] Vladimir Matveev: *Skript zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie II, Vorlesung 19.* Universität Jena, 2008. (fragen, falls nicht auffindbar)

Themenblock Graphentheorie

Anwendungen der Euler-Formel in der Graphentheorie

- Grundlegende Definitionen: Graph, planarer Graph
- Eulersche Formel am Graphen und Beweis durch Dualisieren
- Nicht-Planarität von $K_{3,3}$ und K_5
- Kombinatorik eines einfachen, ebenen Graphen (mit Beweis) - maximale Kantenzahl, höchster Eckengrad und Farbwechsel bei Zweifärbung (siehe Proposition in [AZ, §13, Prop.])
- Anwendungen:
  - Sylvester-Gallai-Satz
  - Einfarbige Geraden
  - Satz von Pick

Literatur:

[AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise, Kap. 13.* Springer-Verlag, 5. Auflage, 2018. Link: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57767-7`

[MSS] K. Mönius, J. Steuding, P. Stumpf: *Einführung in die Graphentheorie.* Springer-Verlag, 2021. Link: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-33108-5`

Färbung von Graphen: Das Museumswächterproblem und der 5-Farben-Satz

- Definition (Listen-)Färbung eines ebene Graphen
- Der 5-Farben-Satz mit Beweis
- Das Museumswächterproblem mit Beweis
- Falls noch Zeit ist: Dinitz-Problem (evtl. ohne Beweis) oder Anwendung der Graphenfärbung und Algorithmen (siehe [MH] und [RL])

Literatur:

[AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise, Kap. 38, 39 & 40.* Springer-Verlag, 5. Auflage, 2018. Link: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57767-7`

[MSS] K. Mönius, J. Steuding, P. Stumpf: *Einführung in die Graphentheorie.* Springer-Verlag, 2021. Link: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-33108-5`

[RL] R.M.R Lewis: *A Guide to Graph Colouring. Algorithms and Applications.* Springer-Verlag, 2016.

[MH] M. Hebenstreit: *Färbung von Graphen. Grundlagen, Algorithmen und Anwendungen.* Diplomarbeit an der Paris-Lodron-Universität Salzburg, 2018. Verfügbar unter `https://eplus.uni-salzburg.at/obvusbhs/content/titleinfo/4997320/full.pdf`

Themenblock Fraktale

Die drei Vorträge in diesem Themenblock können auch zu zwei Vorträgen zusammengefasst werden (z.B. „Julia- und Mandelbrotmenge“ abgespeckt zu „Fraktale“ dazu).

Fraktale

- Beispiele von Fraktalen: z.B. Koch-Kurve, Sierpinski-Dreieck, Cantor-Menge (nennen), Peano-Kurve, Menger-Schwamm...
- Verschiedene Dimensionsbegriffe (jeweils mit Beispielen):
  - Überdeckungsdimension (topologische Dimension) (siehe [JPS, §2.6])
  - Ähnlichkeitsdimension (siehe [JPS, §4.3])
  - Boxdimension (siehe [JPS, §4.4])
  - Idee der Hausdorff-Dimension und Definition eines Fraktals (fraktale Dimension) (siehe [Video] und [JPS, S. 206 - 209])
- Evtl. Chaos-Spiel oder Sierpinski-Dreieck im Pascalschen Dreieck

Literatur:

[JPS] H. Jürgens, H-O. Peitgen, D. Saupe: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science.* Springer-Verlag New York, 2004.

[Video] Grant Sanderson: Fractals are typically not self-similar. Video: `https://www.3blue1brown.com/lessons/fractal-dimension`

[La] G.C.Layek: *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos, §13.* Springer New Delhi, 2015.

Cantor-Menge

- Definition und Konstruktion der Cantor-Menge
- Ternäre Darstellung der Cantor-Menge
- Eigenschaften (mit Beweis): Länge, Anzahl der Intervall-Randpunkte, Mächtigkeit, topologische Eigenschaften (abgeschlossen, kompakt, total unzusammenhängend), C + C (oder C - C)
- Teufelstreppe und ihre Eigenschaften (Länge, Steigung, Stetigkeit) (siehe [JPS, §4.5])

Literatur:

[Ei] Michael Eisermann: *Grundlagen der Topologie, §C6b.* `https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/igt/eiserm/lehre/Topologie/Topologie-1.pdf`

[GO] B.R.Gelbaum, J.M.H.Olmsted: *Counterexamples in Analysis, §8, Intro + Ex. 1, 2, 14, 15.* Dover Publications, Mineola, New York, 1964.

[JPS] H. Jürgens, H-O. Peitgen, D. Saupe: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science, §2.1 und §4.5.* Springer-Verlag New York, 2004.

[St] Steven H. Strogatz: *Nonlinear Dynamics and Chaos, §11.2.* Perseus Books, 1994.

Mandelbrot- und Julia-Menge

- Definition der Julia-Menge (siehe [JPS, §13.4])
- Aussage über Divergenz und Konvergenz mit Beweis (siehe [JPS, S. 738ff])
- Wann ist die Julia-Menge zusammenhängend für reelle c? Ergebnis für komplexe c (graphische Erklärung) (siehe [JPS, §13.8 bis S. 777])
- Visualisierungen (Farben erklären und Beispiele)
- Definition der Mandelbrot-Menge und Zusammenhang zur Julia-Menge
- Evtl.: logistische Gleichung, Bifurkationsdiagramm und Zusammenhang zur Mandelbrot-Menge

Literatur:

[JPS] H. Jürgens, H-O. Peitgen, D. Saupe: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science.* Springer-Verlag New York, 2004.

[FM] A. Fowler, M. McGuinness: *Chaos - An Introduction for Applied Mathematicians, §. 6.5.* Springer International Publishing, 2019.

[Ha] Dörte Haftendorn: *Mathematik sehen und verstehen, §5.3.* Springer Spektrum, 2019.

[La] G.C.Layek: *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos, §13.* Springer New Delhi, 2015.

Themenblock Parkettierungen

Dieses Thema könnte man auch auf zwei Vorträge aufteilen (z.B. periodisch - aperiodisch).

Parkettierungen der Ebene

- Definition Parkettierungen
- Isometrien/Symmetrien ebener Muster
- Klassifizierung von Parkettierungen aus regulären Polygonen (m-Archimedisch, k-uniform)
- Parkettierungen mit beliebigen Polygonen (3-, 4- und 5-Ecken)
- Aperiodische Parkettierungen: Penrose-Parkettierung: (Typen, Anlegeregeln, Verfeinerung, Beweis der Aperiodizität [Kr, §3.1.2])
- Evtl. Tapetenmustergruppen
- Evtl. neue Einstein-Kachel

Literatur:

[Ob] A.D. Oberlerchner: *Parkettierungen im Mathematikunterricht, §5,6.* Diplomarbeit an der Universität Wien, 2015. Verfügbar unter `https://services.phaidra.univie.ac.at/api/object/o:1315245/download`

[Kr] K. Krapf: *Die Penrose-Parkettierung mit Drachen und Pfeil.* Bachelorarbeit an der Universität Heidelberg, 2019. Verfügbar unter `https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~geodyn/teaching/Theses/BA_Katharina_Krapf.pdf`

[GB] B. Grünbaum, G.C. Shephard: *Tilings and patterns.* W.H. Freeman and Company, New York, 1987.

[Ga] R. Gast: *Das Ende der Fünfeck-Saga.* Spektrum.de, News vom 13.07.2017. `https://www.spektrum.de/news/beweis-beendet-suche-nach-fuenfecken/1481717`

[Bi1] M. Bischoff: *Hobby-Mathematiker findet die lang ersehnte Einstein-Kachel.* Spektrum.de, News vom 29.03.2023. Verfügbar unter `https://www.spektrum.de/news/hobby-mathematiker-findet-lang-ersehnte-einstein-kachel/2124963`

[Bi2] M. Bischoff: *Warum Mathematiker ein Hut-Fest für eine Fliese feiern.* Spektrum.de, News vom 14.08.2023. Verfügbar unter `https://www.spektrum.de/news/parkettierung-mathematiker-feiern-hatfest-fuer-einstein-kachel/2168346`

[Hat] D. Smith et al: An aperiodic monotile. Webseite zur Entdeckung des Einstein-Monotiles: `https://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat/`

[Polypad] Mathigon-Polypad. Interaktives Mathematik-Tool um Parkettierungen zu legen: `https://de.mathigon.org/polypad`

Themenblock Gerechtes Teilen

Grundlagen und verschiedene Protokolle

- Grundbegriffe (σ-Algebra, proportionale und neidfreie Aufteilung) und der Satz von Nyman
- Vorstellung einiger Protokolle und ihrer Eigenschaften (proportional? neidfrei? realisierbar?). Die Quelle gibt viele verschiedene Protokolle an, es müssen (und sollen) nicht alle besprochen werden, es sollte aber mindestens ein proportionales und ein neidfreies Protokoll dabei sein. Wie viele genau, hängt von der Zeit ab.

Literatur:

[CH] Claus Hertling: *Spieltheorie II. 2-stündige Vorlesung im FSS 2018, Kapitel 1.* Vorlesungsskript aus Mannheim, Mai 2018.

Gerechte Teilung mit dem Sperner-Lemma

- Erklärung und Beweis des Sperner-Lemmas
- Anwendung des Lemmas auf das Kuchenteilungsproblem

Literatur:

[FES] Francis Edward Su: *Rental Harmony: Sperner's Lemma in fair division.* Amer. Math. Monthly, 106(1999), 930-942.

[AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise, Kap. 28.6.* Springer-Verlag, 5. Auflage, 2018. Link: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57767-7`

Themenblock Mathematische Spiele

Gruppentheorie und Zauberwürfel - Doppelthema

- Die symmetrische Gruppe S_n mit Zykelschreibweise: Definition der Gruppe, Verknüpfung, Anzahl der Elemente (mit Beispiel)
- Zerlegung einer Permutation in disjunkte Zykel und in Transpositionen der Form $(1i)$ (siehe [Gö])
- Die Untergruppe A_n und Erzeugung durch $(1\ 2\ i)$-Zykel (siehe [Ba, §2.2, Satz 5])
- Signum einer Permutation: Erklärung (z.B. über Fehlstände) und Formel
- Aufbau und Notation (Lage und Orientierung) des Zauberwürfels (siehe [Ba, §2.3])
- Definition Gruppenwirkung und Veranschaulichung der Wirkung der S_n auf dem Würfel
- Lösbarkeitssatz mit Beweis (siehe [Ba, §2.4, Satz 1])
- Anzahl möglicher Positionen mit erstaunlichen Beispielen (gerne auch eigene) (siehe [Ba, §2.4, Satz 2])

Literatur:

[Ba] Christoph Bandelow: *Einführung in die Cubologie*. Vieweg Verlag, 1981. Achtung: die Notation in der Verknüpfung in diesem Buch ist von links nach rechts und nicht in der mathematischen Art von rechts nach links!

[Gö] Ulrich Görtz: *Vorlesungsskript Lineare Algebra I, WS 2020/21, §8.3*. Vorlesungsskript an der Universität Duisburg-Essen: `https://math.ug/la1-ws2021/pdf/LA1-WS2021-Goertz-20220123.pdf`.

[Ri] Oswald Riemenschneider: *Elemente der Gruppentheorie (mit Anwendungen auf Mathematische Puzzles)*. Elemente der Gruppentheorie (mit Anwendungen auf Mathematische Puzzles) Oswald Riemenschneider Studienprobe 1981, Universität Hamburg, Fachbereich Mathematik. `https://www.math.uni-hamburg.de/home/riemenschneider/RubiksCube.pdf`

Dobble und projektive Geometrie

- Einführung in des Spiel und kombinatorische Fragen
- Definition eines idealen Dobble-Spiels
- Idee der projektiven Geometrie und der Zusammenhang zu Dobble
- Ebene projektive Geometrie: Fano-Ebene (Konstruktion) und Sätze über Anzahl der Punkte und Geraden

Literatur:

[Ka] Ch. Kathrein: *Ein Einblick in die Mathematik hinter dem Kartenspiel Dobble*. Diplomarbeit an der an der Karl-Franzens-Universität Graz, 2021. Verfügbar unter `https://unipub.uni-graz.at//obvugrhs/download/pdf/6499156?originalFilename=true`

[Workshop] Materialien zum Workshop „Von Dobble zur projektiven Geometrie und zurück“ (A, Schilling, A. Thomas, D. Youmans, K.Wiegand). Universität Heidelberg, 2023.

[Be] A. Beutelspacher, U. Rosenbaum: *Projektive Geometrie: Von den Grundlagen bis zu den Anwendungen, §1.2, §1.5*. Vieweg Verlag, 2004.

[Puzzlewocky] Webseite `https://puzzlewocky.com/games/the-math-of-spot-it/`

[We] Ken Wessen: *The Mathenaeum: The mathematics of Dobble*. Webseite `http://thewessens.net/ClassroomApps/Main/finitegeometry.html?topic=geometry&id=19`

Das Spiel SET

- Vorstellung der Karten und Spielregeln (Beispiele für SETs)
- Kombinatorik über Anzahl der SETs und Wahrscheinlichkeiten ([CD, Fragen (3) - (7)])
- Mathematische Beschreibung
- Satz (inkl. Vorbereitung) dass es maximal 20 Karten ohne ein SET gibt (mit Beweis - siehe [LM, Prop. 5])
- Verallgemeinerungen

Literatur:

[Do] B. Donaldson: SETs, Planets, and Comets. `https://mathcommunities.org/sets-planets-comets/`

[CD] B. Conrey, B. Donaldson: *The Game of Set*, 2009. `https://mathcircles.org/wp-content/uploads/2021/02/Set-Activity-Guide.pdf`

[LM] B. Lent, D. Maclagan: *The Card Game Set*. `https://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/papers/set.pdf`

[Video] Numberphile-Video mit Chatherine Hsu. `https://www.youtube.com/watch?v=EkFX9jUJPKk`

Conways Game of Life

- Regeln des Spiels
- Typen: Stillleben (still lifes), Oszillatoren (oscillators), Raumschiffe (spaceships), insb. Gleiter (glider), Gleiter-Kanonen (glider guns), Esser (eater)
- Unentscheidbarkeit
- Logikgatter AND, OR, NOT: schematisch und Umsetzung im Spiel (siehe [Video] und [Re, Kap. 1.5])
- Was heißt Turing-vollständig und warum ist Life das?
- Verallgemeinerungen mit anderen Regeln oder andere Gatter (siehe [Ro] und [JG, 12.1])

Literatur:

[JG] Nathaniel Johnston, Dave Greene: *Conway's Game of Life - Mathematics and Construction*. Download unter `https://conwaylife.com/book/conway_life_book.pdf`

[Re] Jean-Philippe Rennard: *Implementation of logical functions in the Game of Life*. 2004. `https://arxiv.org/pdf/cs/0406009.pdf`

[Ro] Sioban Roberts: *The Lasting Lessons of John Conway's Game of Life*. The New York Times, 28.12.2020

[Video] `https://www.youtube.com/watch?v=Kk2MH9O4pXY`

Mathematik und Origami

- Was ist Origami?
- Euklidische Axiome und Grenzen der Konstruierbarkeit
- Origami-Axiome und Vergleich/Äquivalenz zu den Euklidischen Axiomen
- Dreiteilung des Winkels (auch als praktisches Beispiel)
- Flachfaltbarkeit: Problemstellung, Sätze über Flachfaltbarkeit (mit Beweisen) (siehe [Hu, §6] und [BN])
- Anwendungen von Origami (z.B. Cut-and-Fold-Theorem, Solarpaneel)

Literatur:

[Hu] Norbert Hungerbühler: *Origami - von der Kunst und der Wissenschaft des Papierfaltens*. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Heft 46, 19-32 (2013). Online unter `https://www.math.ch/norbert.hungerbuehler/publications/OMG_Origami/OMG_article.pdf`

[BN] Dmitri Nedrenco, Johannes Beck: *Flachfaltbarkeit - Mathematik mit eigenen Händen schaffen*. Universität Würzburg, 2016.

[Mathigon] `https://mathigon.org/course/euclidean-geometry/introduction`