

Block-Proseminar

Streifzüge durch die Mathematik Blockseminar

Anna Schilling

Wintersemester 2026/27

Dies ist eine Sammlung der Themen für die Vorträge des Streifzüge-Block-Proseminars. In jeder Sitzung (13:30 - 18 Uhr) werden 3 Vorträge aus einem Themenblock gehalten (Einzelvorträge). Die Vorträge dauern jeweils 60 - 70 Minuten, anschließend gibt es Zeit für Fragen und Feedback.

Themenblock Zahlen - 23.11.2026

Verschiedene Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen

Mehrere Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen aus verschiedenen Bereichen der Mathematik (u.a. Zahlentheorie, Gruppentheorie, Topologie, Analysis)

Literatur:

[AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise*, §1 (ohne Anhang). Springer-Verlag, 5. Auflage, 2018. Link: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57767-7>

Die Fibonacci-Zahlen

- Rekursive Definition der Fibonacci-Zahlen
- Beweise einiger Identitäten (z.B. Summenformeln, Teilbarkeitsregeln, Zusammenhang zwischen verschiedenen Folgengliedern) mit verschiedenen Beweismethoden (indirekt, induktiv, kombinatorisch)
- Vorkommen (Überdeckung von Kästchen, Kaninchenpopulation, Natur)
- Explizite Form und Zusammenhang zum goldenen Schnitt

Literatur:

[BQ] Arthur T. Benjamin, Jennifer J. Quinn: *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*. The Mathematical Association of America (Incorporated), 2003. ISBN: 978-1-61444-208-0

[Cut-Knot] Webseite Cut the knot: <https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/combinatorics/FibonacciTilings.shtml>

$\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$ -Vektorraum und Hilberts 3. Problem

- Das Lemma von Zorn
- Existenz einer Basis von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$ -Vektorraum (nach [Ma])
- Hilberts 3. Problem und die Begriffe dazu

- Dehn-Invarianten
- Gegenbeispiel zu Hilberts 3. Problem

Literatur:

- [AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise*, §10. Springer-Verlag, 5. Auflage, 2018.
Link: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57767-7>
- [Fo] Oliver Fortmeier: *Hilberts drittes Problem*. Proseminar-Ausarbeitung, <http://www.matha.rwth-aachen.de/lehre/SS01/ana3proseminar/hilberts3.problem.pdf>
- [Go] Sebastian Goette: *Lineare Algebra - WS 2016/17*, §7.4. Skript zur Vorlesung, Universität Freiburg. <https://home.mathematik.uni-freiburg.de/goette/Skripten/LA.pdf>
- [Ma] Vladimir Matveev: *Skript zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie II, Vorlesung 19*. Universität Jena, 2008. (fragen, falls nicht auffindbar)

Themenblock Knoten und Graphen - 7.12.2026

Knotentheorie

- Invarianten und deren Bedeutung
- Definition mathematischer Knoten und Knotenprojektionen
- Reidemeisterbewegungen und ambiente Isotopie
- Verschlingungszahl ist eine Knoteninvariante (mit Beweis) und Beispiel (siehe [Co, Kap. 1.4])
- Dreifärbbarkeit ist eine Knoteninvariante (mit Beweis) und Beispiel (siehe [Co, Kap. 1.5])
- Das Bracket- und das Jones-Polynom: Definition und kurze Beispielrechnung für das Bracket-Polynom (siehe [Co, Kap. 6.1])

Literatur:

- [Co] Colin C. Adams: *The Knot Book. An elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. American Mathematical Society, 2004.

Planare Graphen und Anwendungen der Euler-Formel in der Graphentheorie

- Grundlegende Definitionen: Graph, planarer Graph
- Eulersche Formel am Graphen und Beweis durch Dualisieren
- Nicht-Planarität von $K_{3,3}$ und K_5
- Kombinatorik eines einfachen, ebenen Graphen (mit Beweis) - maximale Kantenzahl, höchster Eckengrad und Farbwechsel bei Zweifärbung (siehe Proposition in [AZ, §13, Prop.])
- Anwendungen:
 - Sylvester-Gallai-Satz
 - Einfarbige Geraden
 - Satz von Pick

Literatur:

- [AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise, Kap. 13*. Springer-Verlag, 5. Auflage, 2018. Link: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57767-7>
- [MSS] K. Mönius, J. Steuding, P. Stumpf: *Einführung in die Graphentheorie*. Springer-Verlag, 2021. Link: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-33108-5>

Färbung von Graphen: Das Museumswächterproblem und der 5-Farben-Satz

- Definition (Listen-)Färbung eines ebenen Graphen
- Der 5-Farben-Satz mit Beweis
- Das Museumswächterproblem mit Beweis
- Falls noch Zeit ist: Dinitz-Problem (evtl. ohne Beweis) oder Anwendung der Graphenfärbung und Algorithmen (siehe [MH] und [RL])

Literatur:

- [AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise, Kap. 38, 39 & 40*. Springer-Verlag, 5. Auflage, 2018. Link: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57767-7>
- [MSS] K. Mönius, J. Steuding, P. Stumpf: *Einführung in die Graphentheorie*. Springer-Verlag, 2021. Link: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-33108-5>
- [RL] R.M.R Lewis: *A Guide to Graph Colouring. Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, 2016.
- [MH] M. Hebenstreit: *Färbung von Graphen. Grundlagen, Algorithmen und Anwendungen*. Diplomarbeit an der Paris-Lodron-Universität Salzburg, 2018. Verfügbar unter <https://eplus.uni-salzburg.at/obvusbhs/content/titleinfo/4997320/full.pdf>

Themenblock Fraktale - 11.1.2027

Fraktale und ihre Dimension

- Beispiele von Fraktalen: z.B. Koch-Kurve, Sierpinski-Dreieck, Cantor-Menge (nennen), Peano-Kurve, Menger-Schwamm...
- Verschiedene Dimensionsbegriffe (jeweils mit Beispielen):
 - Überdeckungsdimension (topologische Dimension) (siehe [JPS, §2.6])
 - Ähnlichkeitsdimension (siehe [JPS, §4.3])
 - Boxdimension (siehe [JPS, §4.4])
 - Idee der Hausdorff-Dimension und Definition eines Fraktals (fraktale Dimension) (siehe [Video] und [JPS, S. 206 - 209])
- Evtl. Chaos-Spiel oder Sierpinski-Dreieck im Pascalschen Dreieck

Literatur:

- [JPS] H. Jürgens, H-O. Peitgen, D. Saupe: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer-Verlag New York, 2004.
- [Video] Grant Sanderson: Fractals are typically not self-similar. Video: <https://www.3blue1brown.com/lessons/fractal-dimension>
- [La] G.C.Layek: *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos, §13*. Springer New Delhi, 2015.

Cantor-Menge

- Definition und Konstruktion der Cantor-Menge
- Ternäre Darstellung der Cantor-Menge
- Eigenschaften (mit Beweis): Länge, Anzahl der Intervall-Randpunkte, Mächtigkeit, topologische Eigenschaften (abgeschlossen, kompakt, total unzusammenhängend), $C + C$ (oder $C - C$)
- Teufelstreppe und ihre Eigenschaften (Länge, Steigung, Stetigkeit) (siehe [JPS, §4.5])

Literatur:

- [Ei] Michael Eisermann: *Grundlagen der Topologie, §C6b*. <https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/igt/eiserm/lehre/Topologie/Topologie-1.pdf>
- [GO] B.R.Gelbaum, J.M.H.Olmsted: *Counterexamples in Analysis, §8, Intro + Ex. 1, 2, 14, 15*. Dover Publications, Mineola, New York, 1964.
- [JPS] H. Jürgens, H-O. Peitgen, D. Saupe: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science, §2.1 und §4.5*. Springer-Verlag New York, 2004.
- [St] Steven H. Strogatz: *Nonlinear Dynamics and Chaos, §11.2*. Perseus Books, 1994.

Mandelbrot- und Julia-Menge

- Definition der Julia-Menge (siehe [JPS, §13.4])
- Aussage über Divergenz und Konvergenz mit Beweis (siehe [JPS, S. 738ff])
- Wann ist die Julia-Menge zusammenhängend für reelle c ? Ergebnis für komplexe c (graphische Erklärung) (siehe [JPS, §13.8 bis S. 777])

- Visualisierungen (Farben erklären und Beispiele)
- Definition der Mandelbrot-Menge und Zusammenhang zur Julia-Menge
- Evtl.: logistische Gleichung, Bifurkationsdiagramm und Zusammenhang zur Mandelbrot-Menge

Literatur:

- [JPS] H. Jürgens, H-O. Peitgen, D. Saupe: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer-Verlag New York, 2004.
- [FM] A. Fowler, M. McGuinness: *Chaos - An Introduction for Applied Mathematicians*, §. 6.5. Springer International Publishing, 2019.
- [Ha] Dörte Haftendorn: *Mathematik sehen und verstehen*, §5.3. Springer Spektrum, 2019.
- [La] G.C.Layek: *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*, §13. Springer New Delhi, 2015.

Themenblock Mathematische Spiele - 18.1.2027

Gruppentheorie am Zauberwürfel

- Wiederholung: Die symmetrische Gruppe S_n mit Zykelschreibweise und Signum einer Permutation
- Zerlegung einer Permutation in disjunkte Zyklen und in Transpositionen der Form $(1i)$ (siehe [Gö])
- Die Untergruppe A_n und Erzeugung durch $(1\ 2\ i)$ -Zykel (siehe [Ba, §2.2, Satz 5])
- Aufbau und Notation (Lage und Orientierung) des Zauberwürfels (siehe [Ba, §2.3])
- Definition Gruppenwirkung und Veranschaulichung der Wirkung der S_n auf dem Würfel
- Lösbarkeitssatz mit Beweis (siehe [Ba, §2.4, Satz 1])
- Anzahl möglicher Positionen mit erstaunlichen Beispielen (gerne auch eigene) (siehe [Ba, §2.4, Satz 2])

Literatur:

- [Ba] Christoph Bandelow: *Einführung in die Cubologie*. Vieweg Verlag, 1981. Achtung: die Notation in der Verknüpfung in diesem Buch ist von links nach rechts und nicht in der mathematischen Art von rechts nach links!
- [Gö] Ulrich Görtz: *Vorlesungsskript Lineare Algebra I, WS 2020/21, §8.3*. Vorlesungsskript an der Universität Duisburg-Essen: <https://math.ug/la1-ws2021/pdf/LA1-WS2021-Goertz-20220123.pdf>.
- [Ri] Oswald Riemenschneider: *Elemente der Gruppentheorie (mit Anwendungen auf Mathematische Puzzles)*. Elemente der Gruppentheorie (mit Anwendungen auf Mathematische Puzzles) Oswald Riemenschneider Studienprobe 1981, Universität Hamburg, Fachbereich Mathematik. <https://www.math.uni-hamburg.de/home/riemenschneider/RubiksCube.pdf>

Dobble und projektive Geometrie

- Einführung in das Spiel und kombinatorische Fragen
- Definition eines idealen Dobble-Spiels
- Idee der projektiven Geometrie und der Zusammenhang zu Dobble
- Ebene projektive Geometrie: Fano-Ebene (Konstruktion) und Sätze über Anzahl der Punkte und Geraden

Literatur:

- [Ka] Ch. Kathrein: *Ein Einblick in die Mathematik hinter dem Kartenspiel Dobble*. Diplomarbeit an der an der Karl-Franzens-Universität Graz, 2021. Verfügbar unter <https://unipub.uni-graz.at//obvugrhs/download/pdf/6499156?originalFilename=true>
- [Workshop] Materialien zum Workshop „Von Dobble zur projektiven Geometrie und zurück“ (A. Schilling, A. Thomas, D. Youmans, K. Wiegand). Universität Heidelberg, 2023.
- [Be] A. Beutelspacher, U. Rosenbaum: *Projektive Geometrie: Von den Grundlagen bis zu den Anwendungen, §1.2, §1.5*. Vieweg Verlag, 2004.
- [Puzzlewocky] Webseite <https://puzzlewocky.com/games/the-math-of-spot-it/>
- [We] Ken Wessen: *The Mathnaeum: The mathematics of Dobble*. Webseite <http://thewessens.net/ClassroomApps/Main/finitegeometry.html?topic=geometry&id=19>

Das Spiel SET

- Vorstellung der Karten und Spielregeln (Beispiele für SETs)
- Kombinatorik über Anzahl der SETs und Wahrscheinlichkeiten ([CD, Fragen (3) - (7)])
- Mathematische Beschreibung
- Satz (inkl. Vorbereitung) dass es maximal 20 Karten ohne ein SET gibt (mit Beweis - siehe [LM, Prop. 5])
- Verallgemeinerungen

Literatur:

- [Do] B. Donaldson: SETs, Planets, and Comets. <https://mathcommunities.org/sets-planets-comets/>
- [CD] B. Conrey, B. Donaldson: *The Game of Set*, 2009. <https://mathcircles.org/wp-content/uploads/2021/02/Set-Activity-Guide.pdf>
- [LM] B. Lent, D. Maclagan: *The Card Game Set*. <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/papers/set.pdf>
- [Video] Numberphile-Video mit Chatherine Hsu. <https://www.youtube.com/watch?v=EkFX9jUJPKk>