

# Proseminar Fun Facts

Anna Schilling

Wintersemester 2023/24

## Hilberts Hotel

- Bijektion von Mengen (injektiv, surjektiv, bijektiv) und Abzählbarkeit
- Hilberts Hotel: Aufbau des Hotels und Verhalten des Portiers (1 Gast - endlich viele Gäste - ein unendlicher Bus - unendliche viele Busse...); Jeweils mit der Abbildung und Interpretation
- Abzählbarkeit von  $\mathbb{Q}$  mit Cantors erstem Diagonalargument (evtl. Calkin-Wilf-Aufzählung)
- Wen kann das Hotel nicht mehr aufnehmen? Cantors Diagonalverfahren und Überabzählbarkeit von  $\mathbb{R}$  mit Cantors zweitem Diagonalargument

Literatur:

- [AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise, Kap. 19 (teilweise)*. Springer-Verlag, 2014.
- [Spektrum] *Cantors Diagonale* (S.48/49) und *Das Hotel Hilbert* (S. 76ff.) aus Spektrum der Wissenschaft Spezial: Unendlich (plus eins), 2/2005.
- [Sz] Kinga Szücs: *Hilbert und das unendliche Hotel - Wie schwierig ist eigentlich die Arbeit eines Hotelportiers?* und *Jenseits der Abzählbarkeit*. Kapitel 6 und 9 in M. Müller (Hrsg.): *Überraschende Mathematische Kurzgeschichten*. Springer Verlag, 2017.

## Verschiedene Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen

Mehrere Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen aus verschiedenen Bereichen der Mathematik (u.a. Zahlentheorie, Gruppentheorie, Topologie, Analysis)

Literatur:

- [AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise, §1* (ohne Anhang). Springer-Verlag, 2014.

## Knotentheorie

- Invarianten und deren Bedeutung
- Definition mathematischer Knoten und Knotenprojektionen
- Reidemeisterbewegungen und ambiente Isotopie
- Verschlingungszahl ist eine Knoteninvariante (mit Beweis) und Beispiel (siehe [Co, Kap. 1.4])
- Dreifärbbarkeit ist eine Knoteninvariante (mit Beweis) und Beispiel (siehe [Co, Kap. 1.5])
- Das Bracket- und das Jones-Polynom: Definition und Beispielrechnung für das Bracket-Polynom (siehe [Co, Kap. 6.1])

Literatur:

- [Co] Colin C. Adams: *The Knot Book. An elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. American Mathematical Society, 2004.

## Euler-Charakteristik

- Was ist die Idee hinter der Topologie (insb. der topologischen Äquivalenz)?
- Euler-Charakteristik für planare Graphen
- Euler-Charakteristik für Polyeder (über stereographische Projektion)
- Anwendungen (z.B. Platonische Körper, Brussels Sprouts)
- Die Euler-Charakteristik von Flächen (durch Verkleben von Polygonen oder Graphen auf Flächen)

Literatur:

- [Be] Stephan Berendonk: *Erkundungen zum Eulerschen Polyedersatz, §3.1.2*. Springer Spektrum Wiesbaden, 2014.
- [AF] I. Agricola, T. Friedrich: *Elementargeometrie, §2.5.3, 2.5.4*. Vieweg+ Teubner Verlag Wiesbaden, 2005.
- [Ei] Michael Eisermann: *Grundlagen der Topologie, §A0, A6* Fassung vom 15. Mai 2023. <https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/igt/eiserm/lehre/Topologie/Topologie-1.pdf>
- [LKK] Alexander Engel: *Der Eulersche Polyedersatz*. Kapitel 12 aus C.Löh, S. Krauss, N. Kilbertus (Hrsg.): *Quod erat knobelandum*. Springer Spektrum, 2019.
- [Re] Renzo's Math 490 *Introduction to Topology, S. 75 um Fig. 4.22, §. 4.5*. 2007. <https://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topology14/Notes.pdf>
- [Workshop] Materialien zum Workshop "Die Euler-Charakteristik und Geometrie" (Alexandra Fuchs, Anna Schilling). Universität Heidelberg, 2022.
- [Video] Jos Leys: *From an Octagon to a Genus 2 Surface*, 2015. <https://www.youtube.com/watch?v=G1yyfPShgqw>

## $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$ -Vektorraum und Hilberts 3. Problem

- Das Lemma von Zorn
- Existenz einer Basis von  $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum (nach [Ma])
- Hilberts 3. Problem und die Begriffe dazu
- Dehn-Invarianten
- Gegenbeispiel zu Hilberts 3. Problem

Literatur:

- [AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise*, §10. Springer-Verlag, 2014.
- [Fo] Oliver Fortmeier: *Hilberts drittes Problem*. Proseminar-Ausarbeitung, <http://www.matha.rwth-aachen.de/lehre/SS01/ana3proseminar/hilberts3.problem.pdf>
- [Go] Sebastian Goette: *Lineare Algebra - WS 2016/17, §7.4*. Skript zur Vorlesung, Universität Freiburg. <https://home.mathematik.uni-freiburg.de/goette/Skripten/LA.pdf>
- [Ma] Vladimir Matveev: *Skript zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie II, Vorlesung 19*. Universität Jena, 2008.

## Anwendungen der Euler-Formel in der Graphentheorie

- Eulersche Formel am Graphen und Beweis durch Dualisieren
- Proposition [AZ, §13, Prop.] über Kombinatorik eines Graphen (mit Beweis)
- Anwendungen:
  - Sylvester-Gallai-Satz
  - Einfarbige Geraden
  - Satz von Pick

Literatur:

- [AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise*, Kap. 13. Springer-Verlag, 2014.

## Färbung von Graphen: Das Museumswächterproblem und der 5-Farben-Satz

- Definition ebener Graph und (Listen-)Färbung
- Der 5-Farben-Satz mit Beweis
- Das Museumswächterproblem mit Beweis

- Falls noch Zeit ist: Dinitz-Problem (evtl. ohne Beweis)

Literatur:

[AZ] M. Aigner, G.M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise, Kap. 38, 39 & 40*. Springer-Verlag, 2014.

## Parkettierungen der Ebene

- Definition Parkettierungen
- Isometrien/Symmetrien ebener Muster
- Klassifizierung von Parkettierungen aus regulären Polygonen (m-Archimedisch, k-uniform)
- Parkettierungen mit beliebigen Polygonen (3-, 4- und 5-Ecken)
- Aperiodische Parkettierungen: Penrose-Parkettierung: (Typen, Anlegeregeln, Verfeinerung, Beweis der Aperiodizität [Kr, §3.1.2])
- Evtl. Tapetenmustergruppen
- Evtl. neue Einstein-Kachel

Literatur:

[Ob] A.D. Oberlerchner: *Parkettierungen im Mathematikunterricht, §5.6*. Diplomarbeit an der Universität Wien, 2015. Verfügbar unter <https://services.phaidra.univie.ac.at/api/object/o:1315245/download>

[Kr] K. Krapf: *Die Penrose-Parkettierung mit Drachen und Pfeil*. Bachelorarbeit an der Universität Heidelberg, 2019. Verfügbar unter [https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~geodyn/teaching/Theses/BA\\_Katharina\\_Krapf.pdf](https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~geodyn/teaching/Theses/BA_Katharina_Krapf.pdf)

[GB] B. Grünbaum, G.C. Shephard: *Tilings and patterns*. W.H. Freeman and Company, New York, 1987.

[Ga] R. Gast: *Das Ende der Fünfeck-Saga*. Spektrum.de, News vom 13.07.2017. <https://www.spektrum.de/news/beweis-beendet-suche-nach-fuenfecken/1481717>

[Bi1] M. Bischoff: *Hobby-Mathematiker findet die lang ersehnte Einstein-Kachel*. Spektrum.de, News vom 29.03.2023. Verfügbar unter <https://www.spektrum.de/news/hobby-mathematiker-findet-lang-ersehnte-einstein-kachel/2124963>

[Bi2] M. Bischoff: *Warum Mathematiker ein Hut-Fest für eine Fliese feiern*. Spektrum.de, News vom 14.08.2023. Verfügbar unter <https://www.spektrum.de/news/parkettierung-mathematiker-feiern-hatfest-fuer-einstein-kachel/2168346>

[Hat] D. Smith et al: An aperiodic monotile. Webseite zur Entdeckung des Einstein-Monotiles: <https://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat/>

[Polypad] Mathigon-Polypad. Interaktives Mathematik-Tool um Parkettierungen zu legen: <https://de.mathigon.org/polypad>

## Fraktale

- Beispiele von Fraktalen: z.B. Koch-Kurve, Sierpinski-Dreieck, Cantor-Menge (nennen), Peano-Kurve, Menger-Schwamm...
- Verschiedene Dimensionsbegriffe (jeweils mit Beispielen):
  - Überdeckungsdimension (topologische Dimension) (siehe [JPS, §2.6])
  - Ähnlichkeitsdimension (siehe [JPS, §4.3])
  - Boxdimension (siehe [JPS, §4.4])
  - Idee der Hausdorff-Dimension und Definition eines Fraktals (fraktale Dimension) (siehe [Video] und [JPS, S. 206 - 209])
- Evtl. Chaos-Spiel oder Sierpinski-Dreieck im Pascalschen Dreieck

Literatur:

- [JPS] H. Jürgens, H-O. Peitgen, D. Saupe: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer-Verlag New York, 2004.
- [Video] Grant Sanderson: Fractals are typically not self-similar. Video: <https://www.3blue1brown.com/lessons/fractal-dimension>
- [La] G.C.Layek: *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos, §13*. Springer New Delhi, 2015.

## Cantor-Menge

- Definition und Konstruktion der Cantor-Menge
- Ternäre Darstellung der Cantor-Menge
- Eigenschaften (mit Beweis): Länge, Anzahl der Intervall-Randpunkte, Mächtigkeit, topologische Eigenschaften (abgeschlossen, kompakt, total unzusammenhängend),  $C + C$  (oder  $C - C$ )
- Teufelstreppe und ihre Eigenschaften (Länge, Steigung, Stetigkeit) (siehe [JPS, §4.5])

Literatur:

- [Ei] Michael Eisermann: *Grundlagen der Topologie, §C6b*. <https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/igt/eiserm/lehre/Topologie/Topologie-1.pdf>
- [GO] B.R.Gelbaum, J.M.H.Olmsted: *Counterexamples in Analysis, §8, Intro + Ex. 1, 2, 14, 15*. Dover Publications, Mineola, New York, 1964.
- [JPS] H. Jürgens, H-O. Peitgen, D. Saupe: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science, §2.1 und §4.5*. Springer-Verlag New York, 2004.
- [St] Steven H. Strogatz: *Nonlinear Dynamics and Chaos, §11.2*. Perseus Books, 1994.

## Mandelbrot- und Julia-Menge

- Definition der Julia-Menge (siehe [JPS, §13.4])
- Aussage über Divergenz und Konvergenz mit Beweis (siehe [JPS, S. 738ff])
- Wann ist die Julia-Menge zusammenhängend für reelle  $c$ ? Ergebnis für komplexe  $c$  (graphische Erklärung) (siehe [JPS, §13.8 bis S. 777])
- Visualisierungen (Farben erklären und Beispiele)
- Definition der Mandelbrot-Menge und Zusammenhang zur Julia-Menge
- Evtl.: logistische Gleichung, Bifukations Diagramm und Zusammenhang zur Mandelbrot-Menge

Literatur:

- [JPS] H. Jürgens, H-O. Peitgen, D. Saupe: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer-Verlag New York, 2004.
- [FM] A. Fowler, M. McGuinness: *Chaos - An Introduction for Applied Mathematicians*, §. 6.5. Springer International Publishing, 2019.
- [Ha] Dörte Haftendorn: *Mathematik sehen und verstehen*, §5.3. Springer Spektrum, 2019.
- [La] G.C.Layek: *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*, §13. Springer New Delhi, 2015.

## Gruppentheorie und Zauberwürfel - Doppelthema

- Die symmetrische Gruppe  $S_n$  mit Zykelschreibweise: Definition der Gruppe, Verknüpfung, Anzahl der Elemente (mit Beispiel)
- Zerlegung einer Permutation in disjunkte Zykel und in Transpositionen der Form  $(1i)$  (siehe [Gö])
- Die Untergruppe  $A_n$  und Erzeugung durch  $(1\ 2\ i)$ -Zykel (siehe [Ba, §2.2, Satz 5])
- Signum einer Permutation: Erklärung (z.B. über Fehlstände) und Formel
- Aufbau und Notation (Lage und Orientierung) des Zauberwürfels (siehe [Ba, §2.3])
- Definition Gruppenwirkung und Veranschaulichung der Wirkung der  $S_n$  auf dem Würfel
- Lösbarkeitssatz mit Beweis (siehe [Ba, §2.4, Satz 1])
- Anzahl möglicher Positionen mit erstaunlichen Beispielen (gerne auch eigene) (siehe [Ba, §2.4, Satz 2])

Literatur:

- [Ba] Christoph Bandelow: *Einführung in die Cubologie*. Vieweg Verlag, 1981. Achtung: die Notation in der Verknüpfung in diesem Buch ist von links nach rechts und nicht in der mathematischen Art von rechts nach links!
- [Gö] Ulrich Görtz: *Vorlesungsskript Lineare Algebra I, WS 2020/21, §8.3*. Vorlesungsskript an der Universität Duisburg-Essen: <https://math.ug/la1-ws2021/pdf/LA1-WS2021-Goertz-20220123.pdf>.
- [Ri] Oswald Riemenschneider: *Elemente der Gruppentheorie (mit Anwendungen auf Mathematische Puzzles)*. Elemente der Gruppentheorie (mit Anwendungen auf Mathematische Puzzles) Oswald Riemenschneider Studienprobe 1981, Universität Hamburg, Fachbereich Mathematik. <https://www.math.uni-hamburg.de/home/riemenschneider/RubiksCube.pdf>

## Dobble und projektive Geometrie

- Einführung in des Spiel und kombinatorische Fragen
- Definition eines idealen Dobble-Spiels
- Idee der projektiven Geometrie und der Zusammenhang zu Dobble
- Ebene projektive Geometrie: Fano-Ebene (Konstruktion) und Sätze über Anzahl der Punkte und Geraden

Literatur:

- [Ka] Ch. Kathrein: *Ein Einblick in die Mathematik hinter dem Kartenspiel Dobble*. Diplomarbeit an der an der Karl-Franzens-Universität Graz, 2021. Verfügbar unter <https://unipub.uni-graz.at/obvugrhs/download/pdf/6499156?originalFilename=true>
- [Workshop] Materialien zum Workshop "Von Dobble zur projektiven Geometrie und zurück"(A, Schilling, A. Thomas, D. Youmans, K.Wiegand). Universität Heidelberg, 2023.
- [Be] A. Beutelspacher, U. Rosenbaum: *Projektive Geometrie: Von den Grundlagen bis zu den Anwendungen, §1.2, §1.5*. Vieweg Verlag, 2004.
- [Puzzlewocky] Puzzlewocky-Webseite <https://puzzlewocky.com/games/the-math-of-spot-it/>
- [We] Ken Wessen: *The Mathenaecum: The mathematics of Dobble*. Webseite <http://thewessens.net/ClassroomApps/Main/finitegeometry.html?topic=geometry&id=19>

## Das Spiel SET

- Vorstellung der Karten und Spielregeln (Beispiele für SETs)
- Kombinatorik über Anzahl der SETs und Wahrscheinlichkeiten ([CD, Fragen (3) - (7)])
- Mathematische Beschreibung
- Satz (inkl. Vorbereitung) dass es maximal 20 Karten ohne ein SET gibt (mit Beweis - siehe [LM, Prop. 5])
- Verallgemeinerungen

Literatur:

- [Do] B. Donaldson: SETs, Planets, and Comets. <https://mathcommunities.org/sets-planets-comets/>
- [CD] B. Conrey, B. Donaldson: *The Game of Set*, 2009. <https://mathcircles.org/wp-content/uploads/2021/02/Set-Activity-Guide.pdf>
- [LM] B. Lent, D. Maclagan: *The Card Game Set*. <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/papers/set.pdf>
- [Video] Numberphile-Video mit Chatherine Hsu. <https://www.youtube.com/watch?v=EkFX9jUJPKk>

## Conways Game of Life

- Regeln des Spiels
- Typen: Stilleben (still lifes), Oszillatoren (oscillators), Raumschiffe (spaceships), insb. Gleiter (glider), Gleiter-Kanonen (glider guns), Esser (eater)
- Unentscheidbarkeit
- Logikgatter AND, OR, NOT: schematisch und Umsetzung im Spiel (siehe [Video] und [Re, Kap. 1.5])
- Was heißt Turing-vollständig und warum ist Life das?
- Verallgemeinerungen mit anderen Regeln oder andere Gatter (siehe [Ro] und [JG, 12.1])

Literatur:

- [JG] Nathaniel Johnston, Dave Greene: *Conway's Game of Life - Mathematics and Construction*. Download unter [https://conwaylife.com/book/conway\\_life\\_book.pdf](https://conwaylife.com/book/conway_life_book.pdf)
- [Re] Jean-Philippe Rennard: *Implementation of logical functions in the Game of Life*. 2004. <https://arxiv.org/pdf/cs/0406009.pdf>
- [Ro] Sioban Roberts: *The Lasting Lessons of John Conway's Game of Life*. The New York Times, 28.12.2020
- [Video] <https://www.youtube.com/watch?v=Kk2MH904pXY>



## Mathematik und Origami

- Was ist Origami?
- Euklidische Axiome und Grenzen der Konstruierbarkeit
- Origami-Axiome und Vergleich/Äquivalenz zu den Euklidischen Axiomen
- Dreiteilung des Winkels (auch als praktisches Beispiel)
- Flachfaltbarkeit: Problemstellung, Sätze über Flachfaltbarkeit (mit Beweisen) (siehe [Hu, §6] und [BN])
- Anwendungen von Origami (z.B. Cut-and-Fold-Theorem, Solarpaneel)

Literatur:

[Hu] Norbert Hungerbühler: *Origami - von der Kunst und der Wissenschaft des Papierfaltens*. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Heft 46, 19-32 (2013). Online unter [https://www.math.ch/norbert.hungerbuehler/publications/OMG\\_Origami/OMG\\_article.pdf](https://www.math.ch/norbert.hungerbuehler/publications/OMG_Origami/OMG_article.pdf)

[BN] Dmitri Nedrenco, Johannes Beck: *Flachfaltbarkeit - Mathematik mit eigenen Händen schaffen*. Universität Würzburg, 2016.

[Mathigon] <https://mathigon.org/course/euclidean-geometry/introduction>