RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie II
Heidelberg, 31.10.2014

Übungsblatt 2

Grassmannsche

Abzugeben bis Freitag, 07.11.14, 14:00 Uhr

(15 Punkte je Aufgabe)

Aufgabe 1. Sei $Gr(k,\mathbb{R}^n)$, $k < n$ der Raum aller k-dimensionalen linearen Unterräume von $\mathbb{R}^n$ (*Grassmannsche*). Wir betrachten die folgenden Abbildungen:
Sei $U \in Gr(k,\mathbb{R}^n)$ und ein dazu komplementärer Unterraum $V \in Gr(n-k,\mathbb{R}^n)$ gewählt, so dass also $U \oplus V = \mathbb{R}^n$ gilt. Sei $\mathcal{U} = \{A \in Gr(k,\mathbb{R}^n) \mid A \cap V = \{0\}\}$. Die Menge $\mathcal{U}$ kann mit $\operatorname{Hom}(U,V) \cong \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$ identifiziert werden (!) und trägt die euklidische Topologie.
Zeigen Sie, dass durch alle derartigen Abbildungen ϕ_{UV} eine glatte Struktur auf $Gr(k,\mathbb{R}^n)$ definiert wird.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst folgende Punkte: Ganz $Gr(k,\mathbb{R}^n)$ wird überdeckt, Kartenwechsel sind glatt und auf offenen Mengen definiert (dadurch kann die Topologie von $Gr(k,\mathbb{R}^n)$ via Karten definiert werden). Zeigen Sie dann, dass bereits endlich viele Karten $Gr(k,\mathbb{R}^n)$ überdecken und dass es zu zwei beliebigen Unterräumen eine Karte gibt, die beide enthält.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Grassmannsche $Gr(k,\mathbb{R}^n)$ kompakt ist.
Hinweis: Es kann hilfreich sein, ein Skalarprodukt zu wählen und mit orthonormalen Basen der Unterräume zu arbeiten.

Aufgabe 3. Wir betrachten die folgende Riemannsche Metrik auf $Gr(k,\mathbb{R}^n)$:
Sei $U \in Gr(k,\mathbb{R}^n)$ und $U^\perp$ das orthogonale Komplement bzgl. eines beliebig gewählten Skalarprodukts. Der Tangentialraum $\mathrm{T}_U Gr(k,\mathbb{R}^n)$ kann wie in Aufgabe 1 mit $\operatorname{Hom}(U,U^\perp)$ identifiziert werden, denn $\mathrm{T}_0 \operatorname{Hom}(U,U^\perp) \cong \operatorname{Hom}(U,U^\perp)$ (hier steht 0 für die Nullabbildung). Das Skalarprodukt auf U und $U^\perp$ induziert ein Skalarprodukt g_U auf $\operatorname{Hom}(U,U^\perp) \cong U^* \otimes U^\perp$.
Zeigen Sie:

(a) $Gr(k,\mathbb{R}^n)$ ist homogen, d.h. zu beliebigen Elementen $U,V \in Gr(k,\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Isometrie $f \in \operatorname{Isom}(Gr(k,\mathbb{R}^n))$ mit $f(U) = V$.

(b) Zu jedem Element $U \in Gr(k,\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Isometrie $f \in \operatorname{Isom}(Gr(k,\mathbb{R}^n))$ mit $f(U) = U$ und $\mathrm{d}f_U = -Id$. Mannigfaltigkeiten mit dieser Eigenschaft werden *symmetrische Räume* genannt.

Aufgabe 4. Sei $\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_k\} \in Gr(k,\mathbb{R}^n)$, und sei wie in Aufgabe 3 ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und damit eine Riemannsche Metrik auf $Gr(k,\mathbb{R}^n)$ gewählt.

(a) Sei V_m ein m-dimensionaler Unterraum von $\operatorname{span}\{v_2,\ldots,v_k\}^\perp$, wobei $2 \le m \le n-k+1$. Zeigen Sie, dass
$$P_m = \{\operatorname{span}\{v,v_2,\ldots,v_k\} \mid v \in V_m \setminus \{0\}\}$$
eine Untermannigfaltigkeit ist, die isometrisch zu $\mathbb{R}P^{m-1}$ ist.

(b) Sei $m \le \min(k,n-k)$ und seien V_i, $1 \le i \le m$ 2-dimensionale orthogonale Unterräume von $\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_{k-m}\}^\perp$. Zeigen Sie, dass
$$T_m = \{\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_{k-m},w_1,\ldots,w_m\} \mid w_i \in V_i \setminus \{0\}\}$$
ein Untermannigfaltigkeit ist, die isometrisch zu einem m-Torus ist.