

Dr. Andreas Riedel  
Michael Fütterer

Seminar  
**Rigid-Analytische Geometrie**  
Wintersemester 2016/17

---

**Ort:** SR 4 INF 205      **Zeit:** 14 Uhr c.t.      **Beginn:** 19.10.2016

---

### **Inhalt**

Begriffe wie Konvergenz, Grenzwerte, Potenzreihen und analytische Funktionen kann man über beliebigen bewerteten Körpern entwickeln. In der Analysis macht man das über  $\mathbb{R}$  (die Vervollständigung von  $\mathbb{Q}$  bzgl. des gewöhnlichen Absolutbetrags als Bewertung) oder  $\mathbb{C}$ , und in der nicht-archimedischen Welt z.B. über  $\mathbb{Q}_p$  (die Vervollständigung von  $\mathbb{Q}$  bzgl. des  $p$ -adischen Betrags).

In diesem Seminar werden wir die von J. Tate entwickelte Theorie der rigid-analytischen Räume kennenlernen. Dies sind bestimmte topologische Räume, die über einem nicht-archimedischen Körper definiert sind. Eine Motivation für die Definition dieser Räume war die Suche nach einem Analogon der folgende Tatsache: ist  $X$  eine algebraische Varietät über  $\mathbb{C}$  (d.h. definiert durch Polynome), so kann man den dazugehörigen komplex-analytischen Raum  $X(\mathbb{C})$  der komplexwertigen Lösungen (d.h. Nullstellen dieser Polynome) betrachten. Tate erkannte, wie man diese Konstruktion über nicht-archimedischen Körpern modifizieren muss, um sinnvoll von der algebraischen zur analytischen Welt gehen zu können, und definierte damit rigid-analytische Räume.

Die ersten Vorträge des Seminars werden Eigenschaften von nicht-archimedischen Körpern und die Definition der fundamentalen Tate-Algebren bereitstellen. Anschließend werden diese mit topologischen Strukturen angereichert, und wir werden sogenannte Garben auf diesen Räumen betrachten. Dabei lernen wir weitere universelle Strukturen kennen, die generell in vielen algebraischen und topologischen Bereichen eine große Rolle spielen. Der Abschluss bildet schließlich das GAGA-Prinzip (Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique).

Das Seminar orientiert sich in erster Linie an dem ausführlichen Skript "Lectures on Formal and Rigid Geometry" von S. Bosch [1]. Die Standardreferenz in der klassischen rigid-analytischen Geometrie ist [2]. [3] behandelt die Anwendung auf Kurven und abelsche Varietäten im Auge und geht damit weit über unser Ziel hinaus, liefert aber auch eine schöne Motivation durch das Beispiel der projektiven Geraden zu Beginn. Das Skript [4] liefert einen rasanten Überblick, lagert aber viele Beweise auf Übungen aus.

### **Voraussetzungen**

Algebra 1 (Minimum), Algebra 2 (empfohlen), Algebraische Zahlentheorie oder Algebraische Geometrie (könnte von Vorteil sein, aber wer weiss?).

### **Vorbesprechung**

Eine Vorbesprechung mit Vortragsverteilung findet am Dienstag, dem 27.7.2016, um 13.00 Uhr s.t. in SR4 in INF 205 statt.

### **Kontakt**

Andreas Riedel  
INF 205, Raum 03.407  
ariedel@mathi.uni-heidelberg.de  
<http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/rigid>.

## Vortragsliste

### 1. Tate-Algebren und die Sätze von Weierstraß (S. 5-13)

Nicht-archimedisch bewertete Körper, lokal-analytische und strikt-konvergierende Reihen, Tate-Algebren  $T_n$ , Maximumprinzip, Weierstraßdivision und Weierstraß'scher Vorbereitungssatz.

### 2. Eigenschaften und Ideale von Tate-Algebren (S. 14-22)

Noether-Normalisierung,  $T_n$  ist noethersch, faktoriell, jacobson,  $B$ -Ringe und kahle Ringe, Banachräume, Ideale in  $T_n$  sind abgeschlossen.

### 3. Affinoide Algebren (S. 22-28)

Affinoide  $K$ -Algebren, Residuumnorm und Supnorm, Vergleich der zwei Normen.

### 4. Das Maximumprinzip für affinoide Algebren, affinoide Räume (S. 28-34)

Maximumprinzip für Affinoide, topologisch nilpotente Elemente, Äquivalenz der Residuumsnormen, Zariskitopologie auf dem Maximalspektrum, Hilberts Nullstellensatz für Affinoide.

### 5. Affinoide Unterbereiche (S. 34-41)

Kanonische Topologie, Weierstraß-, Laurent- und rationale Bereiche, Affinoide Unterbereiche als universelle Objekte, Beispiele.

### 6. Eigenschaften spezieller affinoider Unterbereiche, Keime (S. 41-45, 48-51)

Transitivitätseigenschaft affinoider Unterbereiche, Faserprodukt in der affinoiden Situation, kanonische Topologie ist verträglich mit Einschränkung auf spezielle affinoide Unterbereiche, Proposition 19 und Theorem 20 (S. 47, 48) nur ohne Beweis, Prägarbe affinoider Funktionen, Keime.

### 7. Tates Satz über die Azyklizität (S. 63-72)

Garbe von affinoiden Unterbereichen, Tates Satz im Falle einer rationalen Überdeckung, Reduktion auf den Fall einer Laurent-Überdeckung, Čech-Koketten und Azyklizität.

### 8. Grothendiecktopologien (S. 72-78)

Kategorielle Definition der Grothendiecktopologie, schwache und starke  $G$ -Topologie auf affinoiden Räumen, Verträglichkeit mit Zariski-Topologie.

### 9. Garben und rigid-analytische Räume (S. 78-85)

Definition von Garben für  $G$ -Topologien, Garbifizierung, rigid-analytische Räume, Prinzip der Verklebung, Faserprodukt.

### 10. Das GAGA-Prinzip (S.85-91)

Beispiel des  $n$ -dimensionalen rigid-analytischen Raums, GAGA-Funktor für Schemata von endlichem Typ.

## Literatur:

[1] S. Bosch, *Lectures on Formal and Rigid Geometry*, Springer, 2014,

[2] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, *Non-archimedean Analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 261, Springer, 1984,

[3] J. Fresnel, M. van der Put, *Rigid analytic geometry and its applications*, Progress in Mathematics, 218, Birkhäuser Boston, 2004,

[4] B. Conrad, *Several approaches to non-archimedean geometry*, erschienen in  *$p$ -adic Geometry*, AMS, 2008.