Prof. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel

Seminar

p-adische L-Funktionen

Wintersemester 2015/16

Ort: HS 2 **Zeit**: 14 Uhr c.t. **Begin**: 15.10.2015

Inhalt

Der Prototyp aller L-Funktionen, die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ für $s \in \mathbb{C}$, verschlüsselt eine Fülle an arithmetischen Informationen. Früh schon wurde von Riemann selbst erkannt, dass die speziellen Werte von $\zeta(s)$ an den negativen ganzen Zahlen bestimmten Gesetzen gehorchen, die aus heutiger Sicht mit arithmetischen Invarianten der Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ (wobei ζ_n eine n-te Einheitswurzel ist) zusammenhängen.

Allgemeiner kann man L-Funktionen zu sogenannten Dirichlet-Charakteren definieren, die eng mit abelschen Erweiterungen $K/\mathbb{Q}$ verbunden sind. Dennoch gestaltet es sich heutzutage immer noch schwierig, diese komplexwertigen Funktionen zu verstehen.

Ein neuer Impuls kam in den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts, als Kubota und Leopoldt durch Interpolation ganzzahliger Zahlen eine Funktion $\zeta_p(s)$ konstruierten, die nun aber als Funktion auf den p-adischen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ existiert. Diese Funktion ist gerade so gebaut, dass ihre speziellen Werte an den negativen ganzen Zahlen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ sich mit speziellen Werten von $\zeta(s)$ vergleichen lassen.

Allgemeiner kann man zu jedem Dirichlet-Charakter eine solche p-adische L-Funktionen bauen, die wiederum mit ihrem komplexwertigen Pendant verbunden ist. Eine neue Sichtweise auf diese Konstruktion wurde dabei von Iwasawa eröffnet, der zeigte, wie man $\zeta_p(s)$ als Maß auf $\mathbb{Z}_p^\times$ auffassen kann, was aber gerade die Galoisgruppe der Erweiterung $\bigcup_{n\geq 1} \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ über $\mathbb{Q}$ ist...

Nach einer Einführung in die klassische Theorie der komplexwertigen Dirichletschen L-Funktionen werden wir uns in diesem Seminar hautpsächlich auf die Konstruktion dieser Maße konzentrieren, zeigen, wie die speziellen Werte dieser mit speziellen Werten von Dirichletschen L-Funktionen zusammenhängen, und daraus schliesslich arithmetische Information ableiten. Die dabei benötigten Hilfsmittel aus der Zahlentheorie, p-adischen Funktionalanalysis, etc., werden im Verlauf des Seminars bereitgestellt und sind auch unabhängig von L-Funktionen interessant.

Das Seminar wird sich größtenteils an Colmez' Artikel "Arithmétique de la Fonction Zêta" orientieren. Einen guten Überblick bieten auch Colmez Vorlesungsnotizen "Fontaine's rings and p-adic L-functions".

Voraussetzungen

Algebra. Es wird das parallele Hören der algebraischen Zahlentheorie 1 dringend empfohlen.

Vorbesprechung

Eine Vorbesprechung mit Vortragsverteilung findet am Dienstag, dem 21.7.2015, um 13.30 Uhr s.t. in HS 3 statt.

Kontakt

Andreas Riedel
INF 288, Zimmer 221
email: `ariedel@mathi.uni-heidelberg.de`
webseite: `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/plfun`.

Literatur: [1] P. Colmez, *Arithmétique de la Fonction Zêta*, erschienen in *La fonction zêta*, 2003,
[2] P. Colmez, *Fontaine's rings and p-adic L-functions*, Tsinghua Notizen, 2004,
[3] L. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, 1997.