Universität Heidelberg Prof. Dr. Otmar Venjakob
Mathematisches Institut Andreas Riedel

Darstellungen von Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Sommersemester 2012

Aufgabenblatt 1 20. April 2012

Auf dem ersten Blatt wollen wir uns einige grundlegende Begriffe rund um Lie-Algebren aus dem letzten Semester vergegenwärtigen. Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei V ein $2l$-dimensionaler K-Vektorraum und f die nicht-degenerierte symmetrische Bilinearform gegeben durch die Matrix $s = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$. Sei $\mathfrak{o}_{2l}(K) = \mathfrak{o}(V) = \{x \in \mathrm{End}(V) |\ f(x(v), w) = -f(v, x(w))\ \forall v, w \in V\}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{o}(V)$ eine Unterliealgebra von $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)$ ist, und bestimmen Sie die Dimension von $\mathfrak{o}(V)$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei L eine Lie-Algebra. Zeigen Sie: Ist L auflösbar, so sind alle Unteralgebren und alle homomorphen Bilder von L ebenfalls auflösbar. Ist I ein auflösbares Ideal von L und L/I auflösbar, so ist L auflösbar. Sind I, J auflösbare Ideale von L, so ist $I + J$ auflösbar. Zeigen Sie damit, dass das Radikal $\mathrm{Rad}(L)$ existiert, und dass $L/\mathrm{Rad}(L)$ halbeinfach ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei V ein dreidimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\{x, y, z\}$. Zeigen Sie: Die Relationen $[x, y] := z, [x, z] := y, [y, z] := 0$ mit den Relationen $(1), (2)$ aus den Axiomen einer Lie-Algebra machen V zu einer Lie-Algebra. V ist auflösbar, aber nicht nilpotent.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei L eine Lie-Algebra. Zeigen Sie, dass L nilpotent ist genau dann, wenn $\mathrm{ad}(L) = \{\mathrm{ad}(x)(\cdot) = [x, \cdot] |\ x \in L\} \subset \mathrm{End}(L)$ nilpotent ist. Zeigen Sie schliesslich, dass $\mathfrak{sl}_2(K)$ nilpotent ist, falls $\mathrm{char}(K) = 2$.
Bemerkung: Da aus nilpotent auflösbar folgt (d.h. $\mathrm{Rad}(L) = L$) steht dies im krassen Gegensatz zum Fall $\mathrm{char}(K) = 0$ (plus der Annahme, dass K algebraisch abgeschlossen ist): dann gilt sogar, dass für $L = \mathfrak{sl}_n(K)$ für beliebiges n halbeinfach ist (d.h. $\mathrm{Rad}(L) = 0$).