Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Wintersemester 2011/12

Aufgabenblatt 1 14. Oktober 2011

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Man zeige mit Hilfe des Satzes über implizit definierte Funktionen, wie man mit Hilfe der Funktion $F(X) = \det X - 1$ für

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{X \in GL_n(\mathbb{R}) | \ \det X = 1\}$$

lokale Parametrisierungen bekommt.
Zusatz: Zeigen Sie weiter, dass $SL_n(\mathbb{R})$ eine Lie-Gruppe ist.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei G eine Lie-Gruppe und $LG = T_eG$ die assoziierte Lie-Algebra an der Identität $e \in G$.

a) Man zeige, dass die Lie-Klammer $[\ ,\ ] : LG \times LG \to LG$ die Jakobi-Identität

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

erfüllt.

b) Sei $f : H \to G$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen. Man zeige, dass $Lf([X,Y]) = [Lf(X), Lf(Y)]$ für alle $X, Y \in LH$ gilt.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Seien $\mathbb{H}$ die Hamiltonschen Quaternionen und $n \in \mathbb{N}$ sowie $Sp_n = Sp_n(\mathbb{C}) \cap U_{2n}$. Man kann auf $\mathbb{H}^n$ eine Norm via $N(h) = \sum_{i=1}^n h_i\overline{h}_i$ fuer $h \in \mathbb{H}^n$ definieren. Zeigen Sie, dass

$$Sp_n = \{X \in GL_n(\mathbb{H}) | \ N(X(h)) = N(h) \ \forall h \in \mathbb{H}^n\}.$$

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei G eine der Matrizen-Lie-Gruppen. Zeigen Sie, dass aus der Differenzierbarkeit der Multiplikation $\mu : G \times G \to G$ schon die Differenzierbarkeit der Invertierungsabbildung $i : G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$ folgt.
Hinweis: Satz über implizite Funktionen an der Identität.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/lie`
Abgabe bis spätestens 21. Oktober 2011 vor der Vorlesung, bei den Kästen an Hörsaal 2.