

## Lineare Algebra 2

Sommersemester 2014

### Aufgabenblatt 5

15. Mai 2014

Sei  $K$  ein Körper.

#### Aufgabe 1.

(4 Punkte)

- Seien  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl und  $n \geq 2$ . Zeigen Sie, dass es für  $1 \leq r \leq n-1$  keinen Isomorphismus von abelschen Gruppen zwischen  $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^{n-r}\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  geben kann.
- Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle abelschen Gruppen mit 100 Elementen.

#### Aufgabe 2.

(4 Punkte)

Seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein  $K$ -Endomorphismus, sodass  $V$  keine  $f$ -invarianten Unterräume  $U$  mit  $0 \subsetneq U \subsetneq V$  enthält. Zeigen Sie:

- Ist  $f \neq 0$ , so ist  $f$  ein Isomorphismus.
- Ist  $u \in V, u \neq 0$ , so gilt  $V = \langle f^i(u) \mid i \in \mathbb{N}_0 \rangle_K$ .
- Finden Sie ein Beispiel für  $V$  und  $f$  wie oben, wobei  $V$  3-dimensional sein soll.

Finden Sie ausserdem ein Beispiel eines  $f$ -unzerlegbaren  $K$ -Vektorraums, der einen  $f$ -invarianten Unterraum  $U$  mit  $0 \subsetneq U \subsetneq V$  hat.

*Zusatzfrage:* Kann ein 3-dimensionales Beispiel wie in c) über  $\mathbb{R}$  existieren?

#### Aufgabe 3.

(4 Punkte)

Sei

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V_1 & \xrightarrow{\alpha} & V_2 & \xrightarrow{\beta} & V_3 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ 0 & \longrightarrow & V_1 & \xrightarrow{\alpha} & V_2 & \xrightarrow{\beta} & V_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm (d.h. jedes auswählbare "Viereck" kommutiert) von endlich-dimensionalen  $K$ -Vektorräumen, sodass die Zeilen kurze exakte Sequenzen sind. Zeigen Sie:  $\chi_{f_2}(T) = \chi_{f_1}(T) \cdot \chi_{f_3}(T)$ .

#### Aufgabe 4.

(4 Punkte)

Seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein  $K$ -Endomorphismus.

- Sei  $V$   $f$ -zyklisch. Zeigen Sie, dass jeder  $f$ -invariante Unterraum  $U \subset V$  ebenfalls  $f$ -zyklisch ist.
- Sei  $V = \mathbb{Q}^3$ . Finden Sie ein Beispiel eines  $K$ -Endomorphismus  $f$  von  $V$ , sodass  $V$   $f$ -zyklisch ist.