

Lineare Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 4

8. Mai 2014

Aufgabe 1.

(4 Punkte)

Berechnen Sie die Elementarteiler folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 12 \\ 11 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}), \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}), \quad \begin{pmatrix} 1+X & 5+3X-2X^2 \\ -2-2X & -9-6X+3X^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}[X]).$$

Aufgabe 2. (Chinesischer Restsatz)

(4 Punkte)

Seien R ein Hauptidealring und $a \in R$ mit Primfaktorzerlegung $a = \varepsilon \prod_{i=1}^n p_i^{\nu_i}$ mit $n \geq 1$. Wir definieren die R -lineare Abbildung

$$f : R \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n R/(p_i^{\nu_i}), \quad x \longmapsto (x + (p_1^{\nu_1}), \dots, x + (p_n^{\nu_n})).$$

- a) Zeigen Sie, dass f eine wohldefinierte injektive R -lineare Abbildung $\bar{f} : R/(a) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n R/(p_i^{\nu_i})$ induziert (d.h. $\text{Ker}(f) = (a)$).

Hinweis: Siehe Aufgabe 1 b), Blatt 2.

- b) Zeigen Sie, dass $r_i, s_i \in R$ für $1 \leq i \leq n$ existieren mit $r_i p_i^{\nu_i} + s_i \frac{a}{p_i^{\nu_i}} = 1$. Seien für diese s_i die Elemente $e_i := s_i \frac{a}{p_i^{\nu_i}} \in R$ definiert. Zeigen Sie, dass wenn $y = (x_1 + (p_1^{\nu_1}), \dots, x_n + (p_n^{\nu_n})) \in \bigoplus_{i=1}^n R/(p_i^{\nu_i})$ beliebig ist, man $\bar{f}(\sum_{i=1}^n x_i e_i + (a)) = y$ hat, d.h. \bar{f} ist auch surjektiv.

Aufgabe 3.

(4 Punkte)

Ein chinesischer Schäfer möchte wissen, wieviele Schafe in seiner Herde sind. Also beginnt er eines Abends, die Tiere immer zu dritt durch das Gatter laufen zu lassen, und stellt dabei fest, dass zwei Tiere übrig bleiben. Am nächsten Abend wiederholt er das Ganze, lässt aber immer fünf Tiere gleichzeitig durch das Gatter. Dabei bleibt dann ein Tier übrig. Am dritten Abend lässt er die Schafe schließlich immer in Siebenergruppen durch das Gatter laufen, wobei zwei Tiere übrig bleiben. Der Schäfer weiß schon, dass er sicher weniger als 100 Schafe hat. Wieviele hat er genau?

Aufgabe 4.

(4 Punkte)

Seien R ein kommutativer Ring mit 1, $n \geq 1$ und M_i für $0 \leq i \leq n+1$ R -Moduln sowie R -lineare Abbildungen $f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ gegeben, die wir auch übersichtlicher als sogenannte *Sequenz*

$$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} M_{n+1}$$

schreiben können. Diese Sequenz heisst *exakt*, falls $\text{Ker}(f_{i+1}) = \text{Bild}(f_i)$ gilt für alle $0 \leq i \leq n-1$.

- a) Seien $n = 3$, $M_0 = M_4 = 0$, d.h. wir betrachten die *kurze Sequenz* $0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} 0$, wobei f_0 (bzw. f_3) die einzig mögliche Abbildung vom trivialen R -Modul 0 (bzw. in den trivialen R -Modul 0) ist. Zeigen Sie, dass diese exakt ist genau dann, wenn f_1 injektiv, f_2 surjektiv und $\text{Ker}(f_2) = \text{Bild}(f_1)$ gilt.
- b) Finden Sie zwei *verschiedene* (d.h. nicht-isomorphe) Beispiele von \mathbb{Z} -Moduln A und Abbildungen f_1, f_2 , sodass die Sequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{f_1} A \xrightarrow{f_2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ exakt ist.