1. Motivation: (Genaue Definitionen folgen ab Kapitel 2)
Wo kommen lineare Gleichungen vor?

a) Sie wurden schon von den Babyloniern betrachtet und gelöst. Ein Keilschrifttext aus der Zeit Hammurabis ($\sim$ 1700 v.C.) lautet in freier Übersetzumg (v.d.Waerden: Erwachende Wissenschaft, S.106) " Ich habe zwei Felder. Das eine trägt auf 1 bur 4 gur Getreide, das andere auf 1 bur 3 gur. Die Felder sind zusammen 30 sar groß, und das erste trug $8\,\frac{1}{3}$ sila mehr als das zweite. Wie groß sind meine Felder?" (1 bur = 30 sar, 1 gur = 5 sila).
Lösung in moderner Sprache: x bzw. y sei die Größe der Felder in sar. Dann ist

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 30 \\ \frac{x}{30}\cdot 4 & - & \frac{y}{30}\cdot 3 & = & \frac{1}{5}\cdot\frac{25}{3} \end{array}$$

Die (einzige) Lösung ist $x = 20,\ y = 10$.

b) Der Fluß in einem Stromnetz wird durch die Kirchhoffschen Regeln beherrscht:
1. Längs jedem geschlossenen Weg ist die Summe der Spannungen null.
2. An jedem Verzweigungspunkt ist die Summe der abfließenden Ströme (mit Vorzeichen versehen) gleich null.

1.Beispiel:

$I =$ Gesamtstrom
$r_i =$ Widestand auf Teilstück i
$x_i =$ Stromstärke auf Teilstück i
Ohmsches Gesetz $U = I \cdot R$

1. Regel

$$\begin{array}{ccccccc} r_1x_1 & + & r_5x_5 & - & r_2x_2 & = & 0 \\ r_5x_5 & + & r_4x_4 & - & r_3x_3 & = & 0 \end{array}$$

2.Regel

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & I \\ x_3 & + & x_4 & = & I \\ x_3 & + & x_5 & = & x_1 \\ x_2 & + & x_5 & = & x_4 \end{array}$$

(Diese Gleichungen sind gar nicht alle unabhängig, zum Beispiel folgt die letzte aus den übrigen). Wir brauchen uns keine Gedanken über Lösbarkeit zu machen; die Natur zeigt uns, daß irgend etwas eintritt. Das System ist gleichbedeutend mit

$$x_2 = I - x_1,\quad x_4 = I - x_3,\quad x_5 = x_1 - x_3 \text{ sowie}$$

$$\begin{array}{ccccc} (r_1 + r_2 + r_5)\,x_1 & - & r_5x_3 & = & r_2I \\ -r_5x_1 & + & (r_4 + r_4 + r_5)\,x_3 & = & r_4I \end{array}$$

Sie können feststellen, daß dies System genau eine Lösung (für die Unbekannten x_i) besitzt.

2. Beispiel: Stromfluß auf den Kanten eines Würfels.

Da der Würfel 12 Kanten, 8 Ecken und 6 Flächen hat, käme man bei unüberlegtem Drauflosrechnen auf 14 Gleichungen für 12 Unbekannte. Wenn vorausgesetzt wird, daß alle Kanten den gleichen Widerstand haben, kann man durch Symmetriebetrachtung viele Unbekannte sparen. Zum Beispiel rechtfertigt die Spiegelung an der Ebene durch 1,2,3,4 die Beschriftung mit x, y in der Zeichnung. Man setze dies fort und finde den Gesamtwiderstand $R = \frac{U}{I}$, wenn U die Spannung zwischen 1 und 4 ist und alle Kanten den Widerstand 1 Ohm haben.

c) Seit Descartes (1596-1650) werden durch Einführung von Koordinaten geometrische Aufgaben auf Rechenaufgaben zurückgeführt. Dabei führen die einfachsten unter ihnen, welche Geraden und Ebenen betreffen, auf lineare Gleichungen (daher der Name linear für diese Gleichungen).

1. Beispiel: Den Schnittpumkt der beiden Geraden $ax + by = e$ und $cx + dy = f$ in der Ebene zu finden, bedeutet, das System

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{array}$$

mit $(a, b) \neq (0, 0)$ und $(c, d) \neq (0, 0)$ nach x, y aufzulösen. Diskussion der drei Möglichkeiten
(a) Es gibt $\lambda \neq 0$ mit $a = \lambda c, \quad b = \lambda d, \quad e = \lambda f$
(b) $ad - bc = 0$ aber nicht (a)
(c) $ad - bc = 0$

in den Übungen.

2. Beispiel. Entscheiden, ob drei gegebene Geraden der Ebene durch einen Punkt gehen, bedeutet feststellen, ob ein System

$$\begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \\ a_3x & + & b_3y & = & c_3 \end{array}$$

mit $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$ für $i = 1, 2, 3$ eine Lösung x, y besitzt.

3. Beispiel. Man entscheide, ob zwei Geraden im Raum sich treffen oder parallel oder windschief sind (in den ersten beiden Fällen liegen sie in einer Ebene, im letzten nicht). Geraden im Raum werden meist in Parameterdarstellung geschrieben:

$$g: \begin{array}{ccc} x & = & a + \lambda p \\ y & = & b + \lambda q \\ z & = & c + \lambda r \end{array} \qquad g': \begin{array}{ccc} x & = & a' + \mu p' \\ y & = & b' + \mu q' \\ z & = & c' + \mu r' \end{array}$$

Dabei ist $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein fester Punkt auf g und $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ "Richtungsvektor" für die Gerade und λ Parameter, er durchläuft die reellen Zahlen. Entsprechend für g'. Es ist nun zu entscheiden, ob es Parameterwerte λ, μ gibt, so daß

$$(I) \qquad a + \lambda p = a' + \mu p'$$

$$(II) \qquad b + \lambda q = b' + \mu q'$$

$$(III) \qquad c + \lambda r = c' + \mu r'$$

Diskutieren wir dieses System: $q' \cdot I - p' \cdot II$ ergibt

$$\lambda(pq' - qp') = q'(a' - a) - p'(b' - b)$$

. Wenn $pq' - qp' \neq 0$, dann muß

$$\lambda = \frac{q'(a' - a) - p'(b' - b)}{pq - qp'}$$

sein und auf dieselbe Weise

$$\mu = \frac{p(b-b') - q(a-a')}{pq' - qp'}$$

Umgekehrt erfüllen diese λ, μ die Gleichungen I und II. Aber auch III ? Dazu muß

$$c + \frac{q'(a'-a) - p'(b'-b)}{pq - qp'} r = c' + \frac{p(b-b') - q(a-a')}{pq' - qp'} r'$$

sein. Dies ist eine Bedingung an $a, b, \ldots\ldots, q', r'$! Etwas hübscher sieht sie so aus:

$$(a'-a)(qr' - rq') + (b'-b)(rp' - pr') + (c'-c)(pq' - qp') = 0$$

Wir nennen die limke Seite dieser Gleichung D. Statt I und II hätten wir natürlich auch zwei andere der Gleichungen nehmen können. Also: Wenn wenigstens einer der drei Ausdrücke

$$D_1 = pq' - qp',\ D_2 = qr' - rq',\ D_3 = rp' - pr'$$

nicht 0 ist und wenn $D = O$, dann gibt es genau einen Schnittpunkt. Wenn $D \neq 0$ ist, dann treffen sich die Geraden nicht.
Was passiert, wenn alle $D_i = 0$ sind? Wir waren davon ausgegangen, daß p, q, r nicht alle 0 sind (sonst wird durch die Parameterdarstellung keine Gerade, sondern nur der Punkt $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ beschrieben). Ist etwa $p \neq 0$, so setzt man $\frac{p'}{p} = \alpha$ und findet aus $D_1 = D_3 = 0$, daß

$$p' = \alpha p,\ q' = \alpha q \text{ und } r' = \alpha r$$

Die Geraden heißen jetzt

$$\begin{array}{rcl} x = a + \lambda p & & x = a' + \mu\alpha p \\ y = b + \lambda q & \text{und} & y = b' + \mu\alpha q \\ z = c + \lambda r & & z = c' + \mu\alpha r \end{array}$$

Mit μ durchläuft auch $\alpha\mu$ alle reellen Zahlen (weil $\alpha \neq 0$). Die beiden Geraden werden also von demselben Richtungsvektor aufgespannt. Wenn man nun außerdem noch

$$a' = a + \lambda p,\ b' = b + \lambda q,\ c' = c + \lambda r$$

lösen kann, fallen sie zusammen, sonst sind sie parallel. Die folgende Tabelle faßt das Ergebnis zusammen:

Bedingung an $a, b, \ldots., q', r'$	Anzahl der Lösungen λ, μ	Lage der Geraden
$D \neq 0$	0	windschief
$D = 0$, wenigstens ein $D_i \neq 0$	1	Die Geraden treffen sich in genau einem Punkt
Die Tripel$(p, q, r), (p', q', r'), (a-a', b-b', c-c')$ sind proportional	∞	Die Geraden fallen zusammen
$D_1 = D_2 = D_3 = 0$, aber nicht Fall3	0	Die Geraden sind prallel

Nach dieser etwas peniblen Diskussion ist hoffentlich jeder davon überzeugt, daß es sich lohnt, die Sache systematisch anzugehen, insbesondere auch, um allgemeine Erkenntnisse von Spalte 1 und Spalte 2 zu gewinnen und um Begriffe zu entwickeln, welche die verschiedenen Sachverhalte angemessen und übersichtlich ausdrücken und die Lösungsmengen beschreiben. Warum zum Beispiel treten in Spalte 2 immer nur 0, 1 oder unendlich, aber niemals eine andere Zahl von Lösungen auf?

2. Lösung linearer Gleichungssysteme (Gaußsches Verfahren).

Gegeben sind die Zahlen $a_{i,j}$ und b_i. Gesucht sind $x_1, ..., x_n$, die gleichzeitig

$$(I) \qquad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ...... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ...... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & .... & & & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

erfüllen. (I) heißt ein lineares Gleichungssytem von m Gleichungen für n Unbekannte.
Wenn alle $a_{ij} = 0$, so

$$x_1, ..., x_n \text{ beliebig, wenn } b_1 = ... = b_m = 0$$

$$\text{System unlösbar, wenn auch nur ein } b_j \neq 0$$

Nehmen wir also an, wenigstens ein a_{ij} sei nicht 0.
1. Vertausche die Gleichungen, bis (in neuer Bezeichnung) ein $a_{1j} \neq 0$. Dadurch ändert sich die Lösungs-- menge nicht.
2. Vertausche die Unbekannten, bis (in neuer Bezeichnung) $a_{11} \neq 0$. Dadurch ändert sich die Lösungsmenge, aber wir können die Vertauschung hinterher wieder rückgängig machen, um aus den Lösungen des modifizierten Systems die des ursprünglichen zu bekommen.
3. Nun sei also $a_{11} \neq 0$. Man subtrahiert das $\frac{a_{i1}}{a11}$-fache der ersten Zeile von der i-ten und erhält

$$(I') \qquad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ...... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & (a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12})x_2 & + & .... & + & (a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n})x_n & = & b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & (a_{m2} - \frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{12})x_2 & + & .... & + & (a_{mn} - \frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{1n})x_n & = & b_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}b_1 \end{array}$$

Dabei ändert sich die Lösungsmenge nicht! Mit den letzten $m-1$ Gleichungen für die Unbekannten $x_2, ..., x_n$ verfahren wir genauso, bis wir bei den übrig bleibenden Gleichungen auf der linken Seite nur noch Nullen haben.

1. Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_4 & = & 3 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & -x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & -2x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Es gibt unendlich viele Lösungen: x_3 beliebig, $x_2 = -2x_3$ und $x_1 = 1 + x_3$.

2. Beispiel

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & = & 1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ & & x_2 & = & 1 \\ & & x_2 & = & 1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ & & x_2 & = & 1 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Genau eine Lösung: $x_2 = 1, x_1 = -1$.

3.Beispiel

$$\begin{array}{rrcrcl}
 & x_1 & + & x_2 & = & 0 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & = & 1 \\
 & 4x_1 & - & 5x_2 & = & 1 \\
\downarrow & x_1 & + & x_2 & = & 0 \\
 & & & x_2 & = & 1 \\
 & & & -9x_2 & = & 1 \\
\downarrow & x_1 & + & x_2 & = & 0 \\
 & & & x_2 & = & 1 \\
 & & & 0 & = & 10
\end{array}$$

Das System ist unlösbar.

Allgemeine Erkenntnis: Durch

1. Vertauschen von Gleichungen
2. Vertauschen von Unbekannten
3. Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer <u>*anderen*</u> Zeile
4. Multiplizieren einer Gleichunung mit einer von 0 verschiedenen Zahl

läßt sich jedes System von m Gleichungen für n Unbekannte auf die Gestalt

$$(D)\qquad \begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & c_{12}x_2 & + & \ldots\ldots & & \ldots.. & + & c_{1n}x_n & = & d_1 \\
 & & x_2 & + & c_{23}x_3 & + & \ldots.. & + & c_{2n}x_n & = & d_2 \\
 & & & \ddots & & & & & & & \vdots \\
 & & & & x_r & & & + & c_{rn}x_n & = & d_r \\
 & & & & & & & & 0 & = & d_{r+1} \\
 & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 & = & d_m
\end{array}$$

mit einer ganzen Zahl $r \leq m, n$ bringen. Aus (D) kann man ablesen:

(B) Bedingung für die Lösbarkeit:

$$d_{r+1} = \ldots.. = d_m = 0$$

(L) Lösungen:

$$x_{r+1}, \ldots., x_n \text{ beliebig}$$

$$\begin{array}{rclllll}
x_r & = & d_r & - & c_{r,r+1}x_{r+1} & - \ \ldots.. \ - & c_{rn}x_n \\
x_{r-1} & = & d_{r-1} & - & \ldots\ldots & - & c_{r-1,n}x_n
\end{array}$$

usw. Die Lösungen des ursprünglichen Systems gehen aus diesen durch Vertauschen der Unbekannten hervor.

Definition: Ein lineares Gleichungssystem (I), in dem alle $b_i = 0$ sind, heißt homogen.

Ein homogenens System hat natürlich immer die Lösung $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$. Diese bezeichnet man als die triviale Lösung.

Sind alle $b_j = 0$, so auch die daraus durch die Umformungen 1.-4. entstandenen d_j. Nun sind leicht zu beweisen:

Satz 1. *Ein homogenes System mit $n > m$ (mehr Unbekannten als Gleichungen) hat unendlich viele Lösungen.*

Beweis: Man transformiert auf die Gestalt (D). Bedingung (B) ist erfüllt, weil alle $d_j = 0$. Wegen $r \leq m < n$ gibt es $x_{r+1}, \ldots, x_n$ beliebig zu wählen.

Satz 2. *Besitzt ein homogenes System mit $m = n$ nur die triviale Lösung, so ist jedes inhomogene System mit denselben a_{ij} und beliebigen b_j lösbar, und zwar sogar eindeutig.*

Beweis: Man transformiert auf die Gestalt (D). Erhielte man ein $r < n$, so hätte man nicht triviale Lösungen für das homogene System. Also ist $r = n(= m)$, und das transformierte System sieht so aus:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & c_{12}x_2 & + & .... & + & c_{1n}x_n & = & d_1 \\ & & x_2 & + & ..... & + & c_{2n}x_n & = & d_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & x_n & = & d_n \end{array}$$

Dies hat für jedes gegebene n-Tupel $d_1, ..., d_n$ genau eine Lösung.

Die Sätze 1 und 2 werden wir später "vom Höheren Standpunkt" wiederfinden. Die Betrachtungen dieses Kapitels werfen folgende Fragen auf:

1. Ist die Zahl r in dem System (D) abhängig von der Art und Weise, wie wir die Gestalt (D) hergestellt haben? Oder vielleicht nicht?
2. Wie sehen die Lösungsmengen aus? War es Zufall, daß wir stets nur eine, keine oder unendlich viee Lösungen gefunden haben, aber keine andere Anzahl?
3. Bei der Diskussion der Lage zweier Geraden im Raum war die Lösbarkeit bzw. Eindeutigkeit der Lösung durch das Verschwinden oder Nichtverschwinden gewisser Ausdrücke, die von den Koeffizienten der Gleichungen abhingen, gekennzeichnet. Gibt es solche Ausdrücke auch im allgmeinen?
   Die Antworten werden mit Hilfe der in den folgenden Kapiteln zu entwickelnden Begriffe gegeben.

3. Vektorräume

Wir betrachten ein homogenes lineares Gleichungssystem

$$(H)\qquad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \ldots\ldots & & & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & \ldots\ldots & & & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Beobachtung: Sind $x_1, ..., x_n$ und $y_1, ..., y_n$ zwei Lösungen, so auch

$$x_1 + y_1, ..., x_n + y_n \text{ sowie } \lambda x_1, ..., \lambda x_n \text{ für jedes reelle } \lambda$$

Damit hat die Menge der Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems die Struktur eines "Vektorraumes". Dazu kommen jetzt 6 neue Begriffe, die wir der Reihe nach erklären müssen:

Def.1. Eine additive Gruppe A ist eine nicht leere Menge zusammen mit einer Abbildung, die jedem Paar von Elementen x, y aus A ein neues Element aus A zuordnet, welches mit $x + y$ bezeichnet wird, und zwar dergestalt, daß die folgenden Regeln gelten
1. $(x + y) + z = x + (y + z)$: $+$ ist assoziativ
2. $x + y = y + x$: $+$ ist kommutativ
3. Es gibt $0 \in A$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in A$
4. Zu x gibt es y mit $x + y = 0$.

Zur Übung beweisen wir zwei Regeln, die aus 1.-4. folgen:
1. Behauptung: Es gibt nur eine Null mit 3.
Beweis: Angenommen, man hat 0 und 0' in A mit $x + 0 = x$ und $x + 0' = x$ für alle $x \in A$. Dann folgt $0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$.

2. Behauptung: Zu x und y gibt es genau ein z mit $x + z = y$.
Beweis: Existenz: Sei x' ein nach 4. existierendes Element aus A mit $x + x' = 0$. Für $z := x' + y$ gilt dann

$$x + z = x + (x' + y) = (x + x') + y = 0 + y = y + 0 = y$$

Eindeutigkeit: Sei $x + z = y$ und $x + u = y$. Mit dem eben benutzten x' gilt dann

$$z = (x' + x) + z = x' + (x + z) = x' + y = x' + (x + u) = (x' + x) + u = 0 + u = u$$

Insbesondere ist das in 4. geforderte Element y durch x bestimmt. Es wird mit $-x$ bezeichnet. Statt $x + (-y)$ schreibt man $x - y$ und erklärt dadurch die Differenz von x und y .

Beispiele:
* $A = \mathrm{Z}$, übliche Addition
* $A = \mathrm{R}$, dito
* $A = \{g, u\}$ mit $g + g = g,\ g + u = u,\ u + u = g$ (g und u wie gerade und ungerade.) Null ist g , und $-x = x$ für alle x
* Verallgemeinerung davon: Sei $m > 1$ und $A = \{0, 1, 2, ..., m - 1\}$ mit

$$x\text{"} + \text{"}y = \begin{cases} x + y & \text{wenn } x + y < m \\ x + y - m & \text{wenn } x + y \geq m \end{cases}$$

  Dabei ist $+$ die übliche Addition der Zahlen. Null ist 0, und " $-$ "x ist $m - x$, falls $0 < x < m$, und 0 falls $x = 0$.
* A = Menge der Verschiebungen in der Ebene mit $S + T =$ Hintereinanderausführung von S und T ; wie im Kräfteparallelogramm.

Def.2 Ein reeller Vektorraum V ist eine additive Gruppe, deren Elemente man mit reellen Zahlen multiplizieren kann, wobei die folgenden Regeln gelten

1. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$, (λ reell, $x, y \in V$)
2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, (λ, μ reell, $x \in V$)
3. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
4. $1 \cdot x = x$

Bemerkung: Statt aus R kann man die λ auch aus einem anderen "Körper" nehmen. Dies wollen wir jedoch vorläufig nicht tun. Deshalb sagen wir auch einfach "Vektorraum" und meinen damit einen reellen Vektorraum im Sinne von Def.2

Wieder eine kleine Übung: Nur für den folgenden Beweis bezeichnen wir die Null aus V mit $\vec{0}$, und 0 ist die reelle Zahl 0.

3.Behauptung: $0 \cdot x = \vec{0}$ für alle $x \in V$
Beweis: $0 \cdot x + x = 0 \cdot x + 1 \cdot x = (0+1) \cdot x = x$. Nach Beh.1 muß $0 \cdot x = \vec{0}$ sein.
4. Behauptung: $(-1) \cdot x = -x$
Beweis: $-x$ ist das einzige Element von V mit $x + (-x) = \vec{0}$. Nun ist aber auch $x + (-1) \cdot x = (1-1) \cdot x = 0 \cdot x = \vec{0}$. Also ist $(-1) \cdot x = -x$.
Ab jetzt schreiben wir wieder 0 statt $\vec{0}$.

Beispiele für Def.2:

* $V =$ Vektorraum aller Polynome (in einer Variablen) mit reellen Koeffizienten
* $V =$ Vektorraum aller Polynome $\leq n-$ ten Grades
* $V =$ Vektorraum aller reellwertigen stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$
* Standard-Beispiel: $V =$ Vektorraum aller n-Tupel von reellen Zahlen mit komponentenweiser Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen: Man schreibt die n-Tupel als Spalten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \text{ und } \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

  Dieser Vektorraum wird mit R^n bezeichnet.

Def.3. Ist V ein Vektorraum, so heißt eine Teilmenge U von V ein Untervektorraum, wenn
1) Für $x, y \in U$ auch die (in V erklärte) Summe $x+y$ zu U gehört
2) Für $x \in U$ und jedes $\lambda \in R$ auch λx zu U gehört.

Wichtiges Beispiel:

$$V = R^n$$

$$U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \text{ für } i = 1, ..., m \}$$

die Menge der Lösungs-n-Tupel eines homogenen linearen Gleichungssystems. Diesen Unterraum wollen wir auf andere Weise beschreiben, und zwar durch (möglichst wenige) Erzeugende:

Def.4. Sei V ein Vektorraum, $v_1, ..., v_m \in V$ und $\lambda_1, ..., \lambda_m \in R$. Dann heißt der Vektor

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m$$

eine Linearkombination von $v_1, ..., v_m$.
Übung: Die sämtlichen Linearkombinationen von $v_1, ..., v_m$ bilden einen Untervektorraum von V. Dieser heißt der von $v_1, ..., v_m$ aufgespannte Unterraum und wird mit $< v_1, ..., v_m >$ bezeichnet.

Def.5. Ein System von Vektoren, die V aufspannen, nennt man ein Erzeugendensystem von V.

Beispiel:

$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^4 \mid \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 11x_4 & = & 0 \end{array} \}$$

Nach dem Gaußschen Verfahren ist das Gleichungssystem äquivalent zu

$$(H) \qquad \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ & & -x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

x_3 und x_4 sind beliebig wählbar, etwa $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu$. Aus (H) folgt $x_2 = \lambda + 3\mu$ und $x_1 = -5\lambda - 10\mu$. V besteht genau aus allen

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

, d.h. die beiden hier stehenden Spalten spannen V auf.

Entsprechend dem Wunsch, mit möglichst wenigen Erzeugenden auszukommen und keine "überflüssigen" mitzuschleppen, kommt

Def.6. k Vektoren $v_1, ..., v_k$ eines Vektorraumes heißen linear abhängig, wenn es Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_k$ gibt, die nicht alle 0 sind, so daß

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0$$

Beispiele:

1. k Vektoren, von denen einer 0 ist, etwa v_1, sind linear abhängig: man nehme $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = ...\lambda_k = 0$.
2. $x, y \in \mathrm{R}^n$ sind linear abhängig genau dann, wenn $x_i y_j = x_j y_i$ für alle i, j. Beweis: " $\Rightarrow$ ": Sei $\lambda x_i + \mu y_i = 0$ für alle i. Subtrahiere das y_i-fache der j-ten vom y_j-fachen der i-ten Gleichung und erhalte $\lambda(x_i y_j - x_j y_i) = 0$. Analog folgt $\mu(y_i x_j - y_j x_i) = 0$. Da λ und μ nicht beide 0 sind, folgt die Behauptung. " $\Leftarrow$ ": Ist $x_i y_j = x_j y_i$ für alle i, j und zum Beispiel $x_k \neq 0$, so setze $\lambda = \frac{y_k}{x_k}$ und erhalte $y_i = \lambda x_i$ für alle i. Sind alle $x_k = 0$, ist nichts zu zeigen.
3. Sind k Vektoren linear abhängig, so gibt es wenigstens einen unter ihnen, der eine Linearkombination der übrigen ist. Sind von den k linear abhängigen Vektoren je $k-1$ linear unabhängig, so ist jeder eine Linearkombination der übrigen.

Um zu sehen, daß k vorgelegte Vektoren linear unabhängig sind, muß man einsehen

$$\text{Wenn } \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0, \text{ dann } \lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$$

1. Beispiel: Die Funktionen sin und cos auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ sind linear unabhängig; denn aus $\lambda \sin t + \mu \cos t = 0$ für alle t folgt durch Einsetzen von $t = 0$, daß $\mu = 0$, und durch Einsetzen von $\frac{\pi}{2}$, daß $\lambda = 0$.

2. Beispiel: Die Polynome $P_0(t) = 1, P_1(t) = t, ..., P_m(t) = t^m$ sind linear unabhängig; denn ein beliebiges Polynom $c_0 + c_1 t + ... + c_m t^m$ ist nur dann 0 (als Funktion auf der reellen Achse), wenn alle Koeffizienten 0 sind. (Man begründe dies!)

3. Beispiel: Wir wollten zwar nur reelle Vektorräume betrachten. Man überzeuge sich aber, daß alle Forderungen in Definition 2 erfüllt sind, wenn man R statt V und Q statt R nimmt: Man kann R als Vektorraum über Q betrachten.
Behauptung: $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sind linear unabhängig über Q.
Beweis: Seien λ und μ rational und $\lambda\sqrt{2} + \mu\sqrt{3} = 0$. Aus $\lambda\sqrt{2} = -\mu\sqrt{3}$ folgt durch Quadrieren $2\lambda^2 = 3\mu^2$. Wir schreiben für die rationalen Zahlen λ, μ die Primfaktorzerlegung (mit Exponenten in Z) hin. Dann kommt die Primzahl 2 rechts eine gerade Zahl und links eine ungerade Zahl von Malen vor. Das widerspricht dem Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung.

Das folgende Lemma ist der Schlüssel für das Weitere:

Schlüssellemma : Sei V ein Vektorraum und

$$v_1, ..., v_m \text{ ein Erzeugendensystem von } V$$

$$u_1, ..., u_k \text{ linear unabhängig in } V$$

Dann ist $k \leq m$.
Beweis durch Induktion nach m: Für $m = 1$ besteht V aus den Vielfachen eines Vektors, und je zwei von diesen sind linear abhängig. Also ist $k \leq 1(= m)$. Nun sei $m > 1$ und das Lemma bewiesen für alle Vektorräume, die sich mit $m - 1$ Vektoren erzeugen lassen. Da V von $v_1, ..., v_m$ erzeugt wird, kann man schreiben

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccccc} u_1 & = & \alpha_{11}v_1 & + & ...... & + & \alpha_{1m}v_m \\ \vdots & & & & & & \\ u_k & = & \alpha_{k1}v_1 & + & ...... & + & \alpha_{km}v_m \end{array}$$

Wenn $\alpha_{1m} = ... = \alpha_{km} = 0$, dann liegen $u_1, ..., u_k$ bereits in dem von $v_1, ..., v_{m-1}$ aufgespannten Teilraum, und Anwendung der Induktionsannahme auf diesen ergibt $k \leq m - 1$, erst recht $k \leq m$. Sonst sei (notfalls nach Umnumerierung der u_j) $\alpha_{km} \neq 0$. Dann ist

$$v_m = \frac{1}{\alpha_{km}}u_k - \frac{\alpha_{k1}}{\alpha_{km}}v_1 - ..... - \frac{\alpha_{k,m-1}}{\alpha_{km}}v_{m-1}$$

Diesen Ausdruck für v_m setzt man in (1) und sortiert. Dadurch erhält man mit gewissen Koeffizienten β_i und β_{ij}

$$(2) \qquad \begin{array}{ccccccc} u_1 - \beta_1 u_k & = & \beta_{11}v_1 & + & ..... & + & \beta_{1,m-1}v_{m-1} \\ \vdots & & & & & & \\ u_{k-}1 - \beta_{k-1}u_k & = & \beta_{k-1,1}v_1 & + & ..... & + & \beta_{k-1,m-1}v_{m-1} \end{array}$$

Die $k - 1$ Vektoren auf der linken Seite von (2) sind linear unabhängig; denn : angenommen

$$\lambda_1(u_1 - \beta_1 u_k) + ... + \lambda_{k-1}(u_{k-1} - \beta_{k-1}u_k) = 0$$

Durch Sortieren erhält man

$$\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_{k-1}u_{k-1} + \, ? \; u_k = 0$$

Da $u_1, ..., u_k$ linear unabhägig sind, müssen hierin alle Koeffitienten 0 sein, insbesondere

$$\lambda_1 = ... = \lambda_{k-1} = 0$$

Nun wenden wir die Induktionsannahme an auf den Unterraum mit den Erzeugenden $v_1, ..., v_{m-1}$ und den linear unabhängigen Vektoren $u_1 - \beta_1 u_k, ..., u_{k-1} - \beta_{k-1}u_k$ darin. Danach ist $k - 1 \leq m - 1$, also $k \leq m$, und das Lemma ist bewiesen.

1. Folgerung: Die folgenden beiden Aussagen über einen Vektorraum V sind gleichwertig:
(a) V besitzt ein endliches Erzeugendensystem
(b) Es gibt eine natürliche Zahl m so, daß je $m + 1$ Vektoren aus V linear abhängig sind.
Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$: Wird V von m Vektoren erzeugt, so besagt das Schlüssellemma, daß je $m+1$ Vektoren aus V linear abhängig sind.
$(b) \Rightarrow (a)$: Sei

$$A = \{n \in \mathrm{N} \mid \text{ je } n + 1 \text{ Vektoren aus } V \text{ sind linear abhängig}\}$$

Nach (b) ist A nicht leer. Ein Prinzip über natürliche Zahlen (es ist äquivalent zum Induktionsprinzip) besagt, daß es in A eine kleinste Zahl m gibt, d.h. $m \in A$, aber $m - 1 \notin A$. Das bedeutet: je $m + 1$

Vektoren sind linear abhängig, aber es gibt m linear unabhängige Vektoren $v_1, ..., v_m$. Sei nun $v \in V$ beliebig. $v, v_1, ..., v_m$ sind linear abhängig:

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m = 0, \text{ nicht alle } \lambda, \lambda_i = 0$$

Da $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig sind, ist $\lambda \neq 0$. Division durch $-\lambda$ zeigt, daß v Linearkombination von $v_1, ..., v_m$ ist. Da dies für jedes $v \in V$ gilt, ist $V =< v_1, ..., v_m >$ und $v_1, ..., v_m$ ein endliches Erzeugendensystem, wie gewünscht.

Bemerkung: Das erhaltene Erzeugendensystem war auch noch linear unabhängig.
Definition: Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt Basis.

Unmittelbar aus Folgerung 1 ergibt sich *Folgerung 2.*: Ein Vektorraum, der eine (und damit beide) der Eigenschaften (a) und (b) aus Folgerung (1) hat, besitzt eine Basis

(Bemerkung: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis, aber wir haben nicht erklärt, was das heißen soll, wenn (a) und (b) nicht gelten.) Die nächste Folgerung ist der wichtige

Satz 3. *Alle Basen eines Raumes mit (a) und (b) enthalten gleich viele Vektoren.*

Beweis: Nach (b) sind zunächst einmal alle Basen endlich. Seien nun $u_1, ..., u_n$ und $v_1, ..., v_m$ zwei Basen.

$$\left.\begin{array}{ll} u_1, ..., u_n & \text{Erzeugendensystem} \\ v_1, ..., v_m & \text{linear unabhängig} \end{array}\right\} \Longrightarrow m \leq n$$

Da die Voraussetzung symmetrisch in m und n ist, folgt genauso $n \leq m$, zusammen $m = n$.

Definition: Die gemeinsame Länge aller Basen eines Raumes V mit (a) und (b) heißt die Dimension von V; kurz $\dim V$. Ein Raum, der die Eigenschaften (a) und (b) nicht besitzt, heißt unendlich-dimensional.

Beispiel: Der Vektorraum aller Polynome ist unendlich-dimensional; denn $1, t, t^2, ..., t^m$ sind linear unabhängig für jedes m. Erst recht ist der Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ unendlich-dimensional.

In unserer Vorlesung handelt es sich stets um endlich-dimensionale Vektorräume, ohne daß dies jedes Mal ausdrücklich gesagt wird. Beispiel:

* $\dim \mathrm{R}^n = n$; denn die sogenannten Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

spannen R^n auf und sind linear unabhängig.

* $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathrm{R}$ seien nicht alle 0 und

$$V = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0\}$$

Ohne Einschränkung sei $\alpha_1 \neq 0$. Die $n-1$ Vektoren

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -\alpha_3 \\ 0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., v_n = \begin{pmatrix} -\alpha_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

liegen alle in V und sind linear unabhängig, weil $\alpha_1 \neq 0$. Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$ belibig, so ist

$$x = \frac{x_2}{\alpha_1} v_2 + \frac{x_3}{\alpha_1} v_3 + ... + \frac{x_n}{\alpha_1} v_n$$

V wird also von $v_2, ..., v_n$ aufgespannt: $\dim V = n - 1$.

* V = Vektorraum aller differenzierbaren reellwertigen Funktionen f auf R mit $f' = f$. $f(t) = e^t$ gehört zu V und ist nicht 0, also ist $\dim V \geq 1$. Umgekehrt sei $v \in V$. Aus

$$(\frac{v}{f})' = \frac{fv' - vf'}{f^2} = 0$$

folgt $\frac{v}{f} = c$ konstant, also $v = c \cdot f \in < f >$: $\dim V = 1$.

Zum Abschluß beweisen wir den wichtigen Basis-Ergänzungssatz:

Satz 4. *Seien $u_1, .., u_k \in V$ linear unabhängig und $v_1, ..., v_m$ Erzeugende von V. Dann kann man von den v_i passende aussuchen, die mit $u_1, ..., u_k$ zusammen eine Basis von V bilden.*

Beweis: Die Menge $M = \{1, 2, ..., m\}$ hat 2^m Teilmengen. Unter diesen suchen wir alle $I = \{i_1, ..., i_p\}$ heraus, für die $u_1, ..., u_k, v_{i_1}, ..., v_{i_p}$ linear unabhängig sind. Diese I nennen wir (für den Moment) zulässig. Nach Voraussetzung ist die leere Menge zulässig. (Es ist nicht ausgeschlossen, daß sie die einzige zulässige Menge ist). Wir wählen nun eine maximale zulässige Menge, etwa $I = \{i_1, ..., i_r\}$.

1. I zulässig $\Rightarrow u_1, ..., u_k, v_{i_1}, ..., v_{i_r}$ linear unabhängig
2. I maximal $\Rightarrow$ für alle $j \notin I, j \in M$ sind $v_j, u_1, ..., u_k, v_{i_1}, ..., v_{i_r}$ linear abhängig.

Daraus folgt: Jedes v_j ist eine Linearkombination von $u_1, ..., u_k, v_{i_1}, ..., v_{i_r}$. Nun folgt

$$V = < v_1, ..., v_m > = < u_1, ..., u_k, v_{i_1}, ..., v_{i_r} >$$

Zusammen mit 1. ist die Behauptung bewiesen.

Insbesondere: Jedes linear unabhängige System läßt sich zu einer Basis ergänzen. Anwendung:

Sind A und B zwei Unterräume von V, so bilden die sämtlichen $a + b$ mit $a \in A$ und $b \in B$ einen Unterraum von V. Dieser wird mit $A + B$ bezeichnet. Er ist der kleinste Unterraum von V, der sowohl A als auch B enthält.

Satz 5.

$$\dim(A + B) + \dim(A \cap B) = \dim A + \dim B$$

Beweis: Man ergänze eine Basis $c_1, ..., c_r$ von $A \cap B$ zu einer Basis $c_1, ..., c_r, a_1, ..., a_s$ von A. Man nehme eine beliebige Basis $b_1, ..., b_t$ von B.

1. $a_1, ..., a_s, b_1, ..., b_t$ erzeugen $A + B$, nämlich:

$$A + B = < c_1, ..., c_r, a_1, ..., a_s, b_1, ..., b_t > = < a_1, ..., a_s, b_1, ..., b_t >$$

weil die $c_i \in A \cap B \subset B$ sich durch die b_j linear kombinieren lassen.

2. $a_1, ..., a_s, b_1, ..., b_t$ sind linear unabhängig, nämlich:

$$\text{Aus } \sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{t} \mu_j b_j = 0 \text{ folgt}$$

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i = -\sum_{j=1}^{t} \mu_j b_j \in A \cap B, \text{ etwa } = \sum_{l=1}^{r} \nu_l c_l$$

Da $c_1, ..., c_r, a_1, ..., a_s$ linear unabhängig sind, muß $\lambda_1 = ... = \lambda_s = 0$ sein und danach, weil die b_j linear unabhängig sind, auch $\mu_1 = ... = \mu_t = 0$.
Also bilden $a_1, ..., a_s, b_1, ..., b_t$ eine Basis von $A + B$, so daß

$$\dim(A + B) = s + t = \dim A - \dim(A \cap B) + \dim B$$

Zum Schluß merke: Eine Basis ist
- ein linear unabhängiges Erzeugendensystem (Def.7)
- ein möglichst langes linear unabhängiges System
- ein möglichst kurzes Erzeugendensystem.

Lebenszweck von Basis: Jeder Vektor besitzt *genau eine* Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren.

4. Anwendung auf lineare Gleichungen

Jetzt wollen wir einsehen, daß die in Kap. 2 produzierte Zahl r von der Herstellungsweise unabhängig ist.

Definition: Ein rechteckiges Zahlenschema heißt Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}cr \end{pmatrix}$$

Die Frage, ob das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ..... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ..... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

lösbar sei, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob der Vektor $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} =: b$ des R^m aus den n Spalten der Matrix A linear kombinierbar ist:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

kurz: wenn wir die Spalten von A mit $a^{(1)}, ..., a^{(n)}$ bezeichnen, ob

$$b \in < a^{(1)}, ..., a^{(n)} >$$

Definition: Die Dimension des von den Spalten von A aufgespannten Raumes heißt der Spaltenrang von A.

Der Spaltenrang ist die größtmögliche Zahl linear unabhängiger unter den Spalten.

Satz 6. *Der Spaltenrang ändert sich nicht bei den Manipulationen 1.- 4. aus Kap.2*

Beweis:

1. Lineare Abängigkeit von Spalten bedeutet nicht triviale Lösbarkeit eines Systems

$$\sum_i x_i a_{ji} = 0 \text{ für alle } j = 1, ..., m$$

   Daran ändert sich nichts bei Vertauschen der j.
2. Das ist klar
3. Sei A' die Matrix, die aus A durch Addition des $\lambda-$ fachen der j-ten Zeile zur i-ten ($i \neq j$) entsteht. Zur Vereinfachung der Bezeichnung sei exemplarisch $i = 1$ und $j = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & ..... & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}, \; A' = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & .... & a_{1n} + \lambda a_{2n} \\ a_{21} & ..... & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

   $a^{(i)}$ und $a'^{(i)}$ bezeichne die i-te Spalte von A bzw. A'. Für irgendeine Teilmenge $I \subset \{1, 2, ..., n\}$ und reelle λ_i gelten die logischen Äquivalenzen

$$\sum_{i \in I} \lambda_i a'^{(i)} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i a'_{ji} = 0 \text{ für } j = 1, ..., m$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i\in I} \lambda_i(a_{1i} + \lambda a_{2i}) = 0 \text{ und } \sum_{i\in I} \lambda_i a'_{ji} = 0 \text{ für } j = 2, ..., m$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i\in I} \lambda_i a_{1i} + \lambda \sum_{i\in I} \lambda_i a_{2i}) = 0 \text{ und} \sum_{i\in I} \lambda_i a_{ji} = 0 \text{ für } j = 2, ..., m$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i\in I} \lambda_i a_{ji} = 0 \text{ für } j = 1, ..., m \Leftrightarrow \sum_{i\in I} \lambda_i a^{(i)} = 0$$

Dies zeigt: Eine Teilmenge von Spalten von A' ist genau dann linear abhängig, wenn die entsprechenden Spalten von A es sind. Das beweist

$$\text{Rang } A = \text{ Rang } A'$$

4. ist wieder klar, weil einfach eine der zu erfüllenden Gleichungen mit einer Zahl $\neq 0$ multipliziert wird.

In Kap. 2 sahen wir, daß man durch die Manipulationen 1.-4. die Gestalt (D) erreichen kann. Dies vervollkommnen wir noch durch die Bemerkung, daß man in (D) die Einsen benutzen kann, um mit 3. die c_{ij} mit $i < j \leq r$ auszuräumen. Dadurch entsteht in der linken oberen Ecke eine $r \times r$ -Matrix mit lauter Einsen auf der Diagonalen und Nullen sonst. Diese heißt die r -reihige Einheitsmatrix und wird mit 1_r bezeichnet. Aus Satz 6 folgt jetzt, daß die Matrix A denselben Rang hat wie die durch 1.-4. daraus entstandene Matrix

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 1_r & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei ist C eine $r \times (n-r)$ -Matrix, und die Nullen bedeuten eine $(m-r) \times r$ - bzw. eine $(m-r) \times (n-r)$ - Matrix, deren Einträge sämtlich 0 sind. Die obige Matrix besitzt offenbar genau r linear unabhängige Spalten (die ersten r): ihr Rang ist r. Nun haben wir endlich

Satz 7. *Die Zahl r aus Kap. 2 ist unabhängig von der Herstellungsweise der Gestalt D; sie ist der Spaltenrang der Matrix A.*

Man könnte ja auch auf die Idee kommen, die linear unabhängigen Zeilen der Matrix A zu zählen und diese Zahl den Zeilenrang von A zu nennen. Noch leichter als Satz 6 ist zu zeigen

Satz 8. *Der Zeilenrang ändert sich nicht bei 1.-4.*

Beweis: Da der Spaltenrang sich bei 1. und 2. nicht ändert, ändert sich der Zeilenrang nicht bei 2. und 1. Invarianz des Zeilenrangs unter 4. ist klar. Und 3. folgt ganz schnell daraus, daß in einem beliebigen Vektorraum Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n$ denselben Vektorraum aufspannen wie $v_1 + \lambda v_2, v_2, ..., v_n$.

Da die Matrix $(*)$ offenbar auch den Zeilenrang r hat, folgt

Satz 9. *Zeilenrang = Spaltenrang*

Für die linearen Gleichungssysteme erhalten wir

1.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j, \ j = 1, ..., m \text{ lösbar}$$

$$\Longleftrightarrow \text{ Rang } A = \text{ Rang } (A, b)$$

2. Die Lösungen des homogenen Systems

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \text{ für } i = 1, ..., m$$

bilden einen Untervektorraum im R^n . Dessen Dimension ist gleich der Dimension des Lösungsraumes von

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & \ldots & + & c_{1,r+1}x_{r+1} & + & \ldots & + & c_{1n}x_n & = 0 \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & x_r & + & c_{r,r+1}x_{r+1} & + & \ldots & + & c_{rn}x_n & = 0
\end{array} \tag{1}
$$

mit $r =$ Rang A . Ist x Lösung von (1), so läßt sich x schreiben als

$$
x = x_{r+1}\begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} -c_{1n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}
$$

Die $n-r$ Spalten auf der rechten Seite von (2) spannen also den Lösungsraum auf, und sie sind linear unabhängig. Es folgt

Satz 10. *Ist Rang $A = r$, so bilden die Lösungen von*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ i = 1, \ldots, m$$

einen $(n-r)$ -dimensionalen Unterraum des R^n .

3. Hat man eine Lösung des inhomogenen Systems, so erhält man alle Lösungen, indem man die sämtlichen Lösungen des homogenen Systems zu dieser addiert. Geometrische Vorstellung: Die Lösungsmenge, falls sie nicht leer ist, sieht aus wie ein an einem Punkt des R^n aufgehängter $(n-r)$ -dimensionaler Unterraum. Die Beobachtungen 1.-3. erklären nun auch, warum wir für lineare Gleichungssysteme immer keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen gefunden haben.

5. Lineare Abbildungen

V und W seien Vektorräume. Eine Abbildung $\phi : V \to W$ heißt linear, wenn

$$\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\phi(x) + \mu\phi(y) \text{ für alle } x, y \in V \text{ und } \lambda, \mu \in \mathrm{R}$$

Beispiel:

1. Drehung im R^2 : $\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{array}{rclcl} x' & = & x\cos\alpha & - & y\sin\alpha \\ y' & = & x\sin\alpha & + & y\cos\alpha \end{array}$$

2. Scherung im R^2 : $\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{array}{rclcl} x' & = & x & + & \lambda y \\ y' & = & & & y \end{array}$$

3. $V =$ Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ und $W = \mathrm{R}$, und

$$\phi(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

4. V, W wie oben und $\phi(f) = f(0)$
5. $V = W =$ Vektorraum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf R,

$$\phi(f) = f'$$

5.1 Beschreibung durch Matrizen:

Sei $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V. Nach Definition von "linearer Abbildung" ist ϕ durch die Bilder $\phi(v_1), ..., \phi(v_n)$ bestimmt. Umgekehrt gibt es zu beliebig vorgegebenen Vektoren $z_i \in W$ eine (und dann eben genau eine) lineare Abbildung ϕ von V nach W mit $\phi(v_i) = z_i$ für $i = 1, ..., n$. Ist $w_1, ..., w_m$ irgendeine Basis von W, so lassen sich die $\phi(v_i)$ dirch die w_j ausdrücken:

$$\begin{array}{rclclcl} \phi(v_1) & = & a_{11}w_1 & + & ..... & + & a_{m1}w_m \\ \vdots & & & & & & \\ \phi(v_n) & = & a_{1n}w_1 & + & ..... & + & a_{mn}w_m \end{array}$$

Die a_{ij} sind (gegeben $v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m$ und ϕ) eindeutig bestimmt. Also

$$\{\text{ lineare Abbildungen } \phi : V \to W\} \overset{\text{nach Basiswahl}}{\longleftrightarrow} \{\text{Matrizren } A\}$$

$$\text{vermöge } \phi v_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}w_j$$

5.2 Zusammensetzung

Gegeben lineare Abbildungen

$$U \overset{\phi}{\to} V \overset{\psi}{\to} W$$

Wähle Basen

$$u_1, ..., u_k;\ v_1, ..., v_n;\ w_1, ..., w_m$$

und schreibe

$$\psi u_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_j \quad (i = 1, ..., k) \text{ und } \phi v_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j \quad (i = 1, ..., n)$$

Dann ist

$$(\phi \circ \psi) u_i = \phi(\psi u_i) = \phi(\sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_j) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \phi v_j = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \sum_{l=1}^{m} a_{lj} w_l = \sum_{l=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{lj} b_{ji}) w_l$$

Kurz:

Wenn	$\phi \leftrightarrow A$	bezüglich	$\{v_i\}$	und	$\{w_i\}$
und	$\psi \leftrightarrow B$	bezüglich	$\{u_i\}$	und	$\{v_i\}$,
dann	$\phi \circ \psi \leftrightarrow C$	bezüglich	$\{u_i\}$	und	$\{w_i\}$

$$(*) \qquad \text{mit } c_{li} = \sum_{j=1}^{n} a_{lj} b_{ji}$$

Definition: Die Matrix C mit den Koeffizienten c_{ij} aus $(*)$ heißt das Produkt der Matrizen A und B:

$$C = A \cdot B$$

Achtung! $A \cdot B$ ist nur definiert, wenn A so viele Spalten hat wie B Zeilen.
Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$. Dies folgt sofort aus ihrer inhaltlichen Bedeutung (die Hintereinanderausführung von Abbildungen ist assoziativ) und muß nicht an der Formel $(*)$ nachgerechnet werden.

5.3 Basiswechsel

Wie ändert sich die Matrix A aus 5.1, wenn man zu anderen Basen übergeht? Sei $v_1^*, ..., v_n^*$ eine andere Basis von V und $w_1^*, ..., w_m^*$ eine andere Basis von W. Es gibt b_{ij} und c_{ij} mit

$$v_i^* = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_j \text{ und } w_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ji} w_j^*$$

Bezüglich der gestirnten Basen wird ϕ beschrieben durch

$$\phi v_i^* = \phi(\sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \phi v_j \text{ weil } \phi \text{ linear}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k == \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \sum_{l=1}^{m} c_{lk} w_k^*$$

also durch die Matrix A^* mit den Koeffitienten

$$a_{li}^* = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{lk} a_{kj} b_{ji}$$

Nach 5.2 ist

$$(w) \qquad A^* = C \cdot A \cdot B$$

Welche Eigenschaft muß die Matrix B haben, damit die v_i^* wieder eine Basis bilden? Die v_i müssen sich durch die v_i^* ausdrücken lassen: $v_i = \sum_{j=1}^n t_{ji} v_j^*$. Es folgt

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} \sum_{k=1}^{n} b_{kj} v_k = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} b_{kj} t_{ji}) v_k$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der v_i folgt

(1) $$\sum_{j=1}^{n} b_{kj} t_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(1) besagt: $B \cdot T$ ist die in Kap.4 definierte n-reihige Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$. Vertauscht man die Rollen von v_i und v_i^* , so sieht man, daß auch $T \cdot B = \mathbf{1}_n$. Ergebnis:

Damit die $n \times n$-Matrix B einen Basiswechsel beschreibt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Matrix T gibt mit

(i) $$B \cdot T = \mathbf{1}_n = T \cdot B$$

Definition : Eine $n \times n$-Matrix B , für die es T gibt mit (i), heißt invertierbar.

In diesem Falle ist die Matrix T in (i) durch B bestimmt; sie wird mit b^{-1} bezeichnet. Präzisierung von (w):

Bei Basiswechsel geht die neue Matrix A^* aus der alten A durch Multiplikation von links mit einer invertierbaren $m \times m$-Matrix und von rechts mit einer invertierbaren $n \times n$-Matrix hervor.

5.4 Kern und Bild

Sei ϕ eine lineare Abbildung von V nach W .

Definition 1. Kern $\phi = \{x \in V \mid \phi(x) = 0\}$

Definition 2. Bild $\phi = \{\phi x \mid x \in V\} \subset W$

Der Kern von ϕ ist ein Untervektorraum von V und das Bild ist ein Untervektorraum von W .

Definition 3. Eine Abbildung ϕ heißt injektiv, wenn $\phi(x) = \phi(y)$ nur für $x = y$ eintritt, d.h. falls $x \neq y$, dann ist auch $\phi(x) \neq \phi(y)$.

Definition 4. Eine Abbildung $\phi : V \to W$ heißt surjektiv, wenn Bild $\phi = W$.

1. Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn ihr Kern 0 ist.
2. Wird ϕ bezüglich irgendwelcher Basen von V und W durch die Matrix A beschrieben, so ist dim Bild $\phi =$ Rang A . Nämlich: Für eine Teilmenge $I \subset \{1, 2, ..., n\}$ sind die Vektoren $\phi v_i,\ i \in I$ genau dann linear abhängig, wenn die Spalten $a^{(i)},\ i \in I$ der Matrix A linear abhängig sind:

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \phi v_i = \sum_{i \in I} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i \in I} \lambda_i a_{ji}) w_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i a_{ji} = 0 \text{ für alle } j = 1, ..., m \Leftrightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i a^{(i)} = 0$$

Sehr wichtig ist

Satz 11. *Für jede lineare Abbildung ϕ von V nach W gilt*

$$\textit{dim Kern } \phi + \textit{ dim Bild } \phi = n$$

Beweis: Man setzt $r = n-$ dim Kern ϕ. Dann numerieren wir eine Basis von Kern ϕ mit $v_{r+1}, ..., v_n$ und ergänzen sie zu einer Basis $v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n$ von V .

1. Bild $\phi =< \phi v_1, ..., \phi v_n >=< \phi v_1, ..., \phi v_r >$, weil $\phi v_i = 0$ für $i > r$
2. $\phi v_1, ..., \phi v_r$ sind linear unabhängig; denn aus $\lambda_1 \phi(v_1) + ... + \lambda_r \phi(v_r) = 0$ folgt $\lambda v_1 + ... + \lambda v_r \in$ Kern ϕ , also $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$ nach Konstruktion der Basis $v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n$ von V .

1. und 2. zeigen, daß $\phi(v_1), ..., \phi(v_r)$ eine Basis von Bild ϕ bilden. Nun ist

$$\text{dim Bild } \phi = r = n - \text{ dim Kern } \phi,$$

und das war die Behauptung.

Wichtige unmittelbare Folgerung

Satz 12. *Ist ϕ eine lineare Abbildung von V nach W und ist dim V = dim W, so ist ϕ genau dann surjektiv, wenn es injektiv ist.*

5.5 Übersetzung in Matrizensprache

Dazu nimmt man $V = \mathrm{R}^n$ und $W = \mathrm{R}^m$ mit den Basen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $w_1, ..., w_m$ entsprechend. Die v_i bzw. w_i heißen die Einheitsvektoren im R^n bzw. R^m. ϕ werde bezüglich dieser Basen durch die Matrix A beschrieben:

$$\phi v_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \ i = 1, ..., n$$

* Die Bilder der Einheitsvektoren sind die Spalten der Matrix A. (Hier ist sofort klar, daß dim Bild ϕ = Rang A).

Für einen beliebigen Vektor $x \in \mathrm{R}^n$ gilt

$$\phi x = \phi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \phi(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

* $\phi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ ist die Multiplikation der Spalten des R^n von links mit der Matrix A.

Übersetzung von Satz 11:

* Ist $L = \{x \in \mathrm{R}^n \mid Ax = 0\}$, so ist dim $L = n-$ Rang A. (Vergl. Satz 10)

Übersetzung von Satz 12:

* Ist A quadratisch (das heißt $n = m$), so hat $Ax = 0$ nur die triviale Lösung genau dann, wenn $Ax = b$ lösbar ist für jedes $b \in \mathrm{R}^n$. (Vergl. Satz 2)

Fassen wir zusammen:

Satz 13. *Für eine quadratische Matrix A sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*
(1) Rang $A = n$
(2) Aus $Ax = 0$ ($x \in \mathrm{R}^n$) folgt $x = 0$
(3) $Ax = b$ ist lösbar für alle $b \in \mathrm{R}^n$
(4) A ist invertierbar
(5) Ist z eine Zeile und ist $zA = 0$, so ist $z = 0$.

Beweis: Die Äquivalenz von (1),(2) und (3) ist die Übersetzung von Satz 11 und 12.
(1) $\Rightarrow$ (4): Sind die Spalten von A linear unabhängig, so vermittelt die Matrix A einen Basisübergang, nämlich von den Einheitsvektoren zu diesen Spalten. Nach 5.3 ist A invertierbar.
(4) $\Rightarrow$ (1) Dazu beweisen wir gleich ein etwas allgemeineres

Lemma 1. *Für jede $n \times p$-Matrix A und jede $p \times m$- Matrix B gilt*

$$\text{Rang } (A \cdot B) \leq \text{ min (Rang } A, \text{ Rang } B)$$

Beweis: Sind $b^{(i)}$ die Spalten von B, so sind $Ab^{(i)}$ die Spalten von $A \cdot B$. Unter diesen sind höchstens so viele linear unabhängige wie unter den $b^{(i)}$. Sind $a_{(i)}$ die Zeilen von A, so sind $a_{(i)}B$ die Zeilen von

$A \cdot B$; wieder sind unter letzteren höchstens so viele linear unabhängige wie unter den ersteren. Also ist der Rang von AB sowohl $\leq$ Rang B als auch $\leq$ Rang A .

Wendet man das Lemma an auf $n = p = m$ und $AB = \mathbf{1}_n$, so folgt die Behauptung.
(1) $\Rightarrow$ (5) : Eine Gleichung $zA = 0$ mit $z \neq 0$ bedeutet eine lineare Abhängigkeit der Zeilen von A .

Merke: Ist A quadratisch, so folgt aus $AB = \mathbf{1}_n$, daß auch $BA = \mathbf{1}_n$. Ist A nicht quadratisch, so ist dies sicher falsch; denn aus $BA = \mathbf{1}_m$ folgt $m =$ Rang $(BA) \leq$ min (Rang B , Rang A) $\leq n$, ebenso $n \leq m$, also $m = n$.

Schließlich folgern wir aus dem Beweis von Satz 11 eine Aussage über Matrizen: Wir nehmen wieder eine Basis $v_1, ..., v_n$, deren letzte $n - r$ Vektoren eine Basis von Kern ϕ bilden. Dann ergänzen wir die Vektoren $\phi v_1, ..., \phi v_r$ durch geeignete Vektoren $w_{r+1}, ..., w_m$ zu einer Basis von W . Bezüglich dieser Basen wird nun ϕ durch die Matrix

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{beschrieben}$$

Mit anderen Worten: Wenn man (zu gegebenem ϕ) die Basen in V und W passend wählt, so kann man ϕ durch eine Matrix vom Typ $(*)$ beschreiben. In 5.3 haben wir Basiswechsel studiert. Aus (w) in 5.3 und aus $(*)$ lesen wir ab:

Satz 14. *Zu jeder $m \times n$ -Matrix A gibt es eine invertierbare $m \times m$ -Matrix B und eine invertierbare $n \times n$ -Matrix C , so daß*

$$B \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei ist r der Rang der Matrix A .

Dies ist die Lösung des gröbsten von verschiedenen in dieser Vorlesung zu behandelnden Normalformenproblemen: Tut man je zwei $m \times n$ - Matrizen in dieselbe Klasse, wenn sie durch Multiplikation von links und rechts mit invertierbaren Matrizen auseinander hervorgehen, so ist jede Klasse durch den Rang der darin vorkommenden Matrizen gekennzeichnet. Genauer: Alle $m \times n$ -Matrizen vom Rang r gehören zur selben Klasse wie $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Elementare Matrizen

Wir wollen einen Algorithmus zur Herstellung (fast) der Gleichung in Satz 14 und zur Inversion einer Matrix entwickeln.
Mit e_{ij} wird die Matrix bezeichnet, die an der Kreuzung von i-ter Zeile und j-ter Spalte eine 1 hat und sonst 0. Matrizen werden komponentenweise addiert und mit reellen Zahlen multipliziert. In diesem Sinne ist die Matrix A mit den Koeffizienten a_{ij} gleich $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}e_{ij}$.
Definition: Eine Matrix der Gestalt $\mathbf{1}+\lambda e_{ij}$ mit $\lambda \in \mathrm{R}$ und $i \neq j$ heißt elementar. Bezeichnung: $E_{ij}(\lambda)$.
Es gilt $E_{ij}(\lambda)E_{ij}(\mu) = E_{ij}(\lambda+\mu)$ und $E_{ij}(0) = \mathbf{1}$. Insbesondere sind alle $E_{ij}(\lambda)$ invertierbar; die Inverse ist $E_{ij}(-\lambda)$. Man beobachtet:

(i) Multiplikation einer Matrix von links mit mit $E_{ij}(\lambda)$ bewirkt Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten.

(ii) Multiplikation einer Matrix von rechts mit $E_{ij}(\lambda)$ bewirkt Addition des λ-fachen der i-ten Spalte zur j-ten.

Aus Kap. 2 folgt, daß man durch (i) und (ii) jede Matrix auf die Gestalt $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bringen kann, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Das bedeutet, daß es zu jeder $m \times n$-Matrix passende elementare $m \times m$-Matrizen $E^{(1)}, ..., E^{(s)}$ und elementare $n \times n$-Matrizen $F^{(1)}, ..., F^{(t)}$ gibt mit

$$E^{(1)} \cdot .... \cdot E^{(s)} \cdot A \cdot F^{(1)} \cdot .... \cdot F^{(t)} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & ... & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & ... & d_r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{r} d_i \neq 0 \quad (r = \text{ Rang } A)$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-4)\cdot} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot E_{12}(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot E_{13}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot E_{23}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verfeinerung für quadratische invertierbare Matrizen:

Ist A invertierbar, so besteht die erste Spalte von A nicht aus lauter Nullen. Ist nun $a_{11} = 0$ aber zum Beispiel $a_{k1} \neq 0$, so erhält man durch Addition der k-ten *Zeile* zur ersten eine Matrix A^* mit $a_{11}^* = a_{k1} \neq 0$. In dieser kann man durch *Zeilen*operationen alle übrigen Einträge in der ersten Spalte zu 0 machen. In einer invertierbaren Matrix

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & * & ... & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Y & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

ist nun auch die Teilmatrix Y invertierbar (Übung: $X^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & ? & ... & ? \\ 0 & & & \\ \vdots & & Y^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$) Also kann man fortfahrend jede invertierbare Matrix durch *Zeilen*umformungen in Dreiecksgestalt bringen. Da hierin alle Diagonalglieder $\neq 0$ sind, kann man der Reihe nach dann auch noch alle Einträge oberhalb der Diagonalen ausräumen. Wir haben gesehen:

Zu jeder invertierbaren Matrix A gibt es elementare Matrizen $E^{(1)}, ..., E^{(s)}$ so daß

$$E^{(1)} \cdot .... \cdot E^{(s)} A \text{ diagonal ist.}$$

Verbesserung: Sei $ab \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(1)\cdot} \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(\frac{1-a}{a})\cdot} \begin{pmatrix} 1 & b\frac{1-a}{a} \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{21}(-a)\cdot} \begin{pmatrix} 1 & b\frac{1-a}{a} \\ 0 & ab \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-\frac{1-a}{a^2})\cdot} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$$

bedeutet

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-a}{a^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-a}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$$

Man kann also noch alle Diagonalglieder bis auf eines zu 1 machen Zusammen haben wir

Satz 15. *Zu jeder invertierbaren Matrix A gibt es elementare Matrizen $E^{(1)}, ..., E^{(s)}$ und eine reelle Zahl $d \neq 0$, so daß*

$$E^{(1)} \cdot ... \cdot E^{(s)} A = \begin{pmatrix} 1 & ... & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & d \end{pmatrix}$$

Abgesehen davon, daß der Satz die Frage nach der Bedeutung der Zahl d aufwirft (hängt sie vielleicht von den gewählten $E^{(i)}$ ab?) erhalten wir einen Algorithmus zur Inversion von Matrizen. Bezeichnet nämlich E das Produkt der elementaren Matrizen auf der linken Seite, so zeigt Satz 15, daß

$$(I) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & ... & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \cdot E$$

Verfahren: Man schreibt

$$A \qquad\qquad \mathbf{1}$$

Man wendet auf A und auf die Einheitsmatrix *dieselbe* Zeilenumformung an. Das ist dasselbe, wie wenn man A und die Einheitsmatrix von links mit derselben elementaren Matrix $E^{(1)}$ multipliziert. Man erhält

$$E^{(1)} A \qquad\qquad E^{(1)}$$

Dies setzt man fort und erhält

$$E \cdot A \qquad\qquad E$$

wobei E ein Produkt von elmentaren Matrizen ist. Nach Satz 15 kann man die letzteren so wählen, daß links eine Diagonalmatrix D steht. Dann ist $D^{-1}E$ die Inverse von A.

Beispiel:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Operation} & A & \mathbf{1} \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
III + II & & \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
III - 2II & & \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
II - 6III & & \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 13 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
I - II & & \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & -13 & 6 \\ -6 & 13 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
I - 11II & & \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 & 9 & -5 \\ -6 & 13 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Es folgt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 9 & -5 \\ -6 & 13 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ -2 & \frac{13}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Leser möge die Probe machen.

2. Beispiel

$$\begin{array}{ccc}
\text{Operation} & A & \mathbf{1} \\
 & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
II - \frac{c}{a}I & & \\
 & \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a}b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \\
I - \frac{ab}{ad-bc}II & & \\
 & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Nach dem Verfahren ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Das letzte Diagonalglied aus Satz 15 ist hier $ad - bc$,also tatsächlich nur von A und nicht von den Umformungen abhängig. Im nächsten Kapitel wollen wir sehen, daß dies immer so ist.

7. Determinanten

Gegeben sind n Vektoren $a_1, ..., a_n$ im R^n.

$$P = \{x = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ für } i = 1, ..., n\}$$

heißt der von $a_1, ..., a_n$ aufgespannte Spat (oder das Parallelotop)

$n = 2$: Mit Hilfe von zwei Scherungen kann man den von $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ aufgespannten Spat in ein flächengleiches Rechteck mit der Höhe b_2 und der Breite $a_1 - \frac{a_2}{b_2} b_1$ verwandeln. Die Fläche ist also (Vorzeichen ignoriert)

$$a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Zum Wort Scherung: Eine Scherung in einem Vektorraum V ist eine lineare Abbildung ϕ von V in sich der speziellen Gestalt

$$\phi x = x + f(x)t \text{ mit einem festen Vektor } t \text{ und einer festen linearen Funktion } V \to \mathrm{R} \text{ mit } f(t) = 0$$

Offenbar bleibt die Hyperebene $f(x) = 0$ elementweise fest, t liegt in dieser Hyperebene, und jeder Vektor bewegt sich in Richtung t, und zwar umso mehr, je weiter er von der Hyperebene entfernt ist. Scherungen sind invertierbar:

$$\phi^{-1} x = x - f(x)t$$

Ist $V = \mathrm{R}^n$ und t der i-te Einheitsvektor e_i und f das λ-fache der Projektion auf die j-te Koordinate ($j \neq i$), so ist

$$\phi x = x + \lambda x_j \cdot e_i = (\mathbf{1} + \lambda e_{ij})x$$

Jetzt haben wir eine geometrische Interpretation der elementaren Matrizen : sie beschreiben Scherungen in Richtung der Koordinatenachsen. Für $n = 2$ sahen wir an der Zeichnung, daß Scherungen flächentreu sind. Für $n = 3$ können wir uns anhand unserer räumlichen Vorstellung davon überzeugen, daß Scherungen volumentreu sind. Kap. 6 zeigt, daß man jeden Spat durch Scherungen in einen Quader überführen kann mit der Grundfläche 1 mal 1 und der Höhe d. Die Zahl d aus Kap. 6 ist also (für $n = 2$ und 3) das Volumen des von den Spaltenvektoren der Matrix A aufgespannten Spats. Angeregt durch dieses suchen wir für irgendeinen Vektorraum V eine reellwertige Funktion F auf $V \times V \times ... \times V$ mit den folgenden Eigenschaften:

D1. Für alle Vektoren $x_1, ..., x_n$ und y aus V und alle $i = 1, ..., n$ gilt

$$F(x_1, ..., x_i + y, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_i, ..., x_n) + f(x_1, ..., y, ...x_n)$$

(Vorstellung: Zwei zusammenpassende Spate werden aneinandergeklebt (und notfalls der entstandene Körper begradigt))

D2. Für reelle λ ist

$$F(x_1, ..., \lambda x_i, ..., x_n) = \lambda F(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$$

(Vorstellung: Der Spat wird in Richtung x_i aufgeblasen)

D3. Wenn $x_1, ..., x_n$ linear abhängig sind, dann ist

$$F(x_1, ..., x_n) = 0$$

(Vorstellung: zusammengeklatschter Spat)

Natürlich erfüllt die Funktion, die für jede Einsetzung 0 ist, diese Bedingungen. Wir wollen in diesem Kapitel beweisen, daß es eine Funktion mit den Eigenschaften D1.-D3. gibt, die nicht identisch 0 ist. Um F zu finden, schließen wir aus D1.-D3., wie F aussehen müßte, wenn es denn F gäbe: Sei $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V. Für alle reellen a_{ij} gilt dann

$$F(\sum_{j=1}^{n} a_{j1} v_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{jn} v_j) = \sum_{j_1,..,j_n=1}^{n} a_{j_1 1} .... a_{j_n n} F(v_{j_1}, ..., v_{j_n}) \text{ nach D1. und D2.}$$

Hierin ist $F(v_{j_1},...,v_{j_n}) = 0$ nach D3., wenn zwei der Indices j_k übereinstimmen. Daher brauchen wir nur über die n-Tupel verschiedener j_k zu summieren. Diese entstehen durch "Permutation" aus 1,2,...,n:

Definition: Eine bijektive Abbildung einer Menge auf sich heißt Permutation.

Beispiel: Durch Permutation entstehen aus (1,2,3) die 6 Tripel (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), (1,3,2), (3,2,1) und (2,1,3).

Also

$$F(\sum_{j=1}^{n} a_{j1}v_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{jn}v_j) = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1),1} \cdot ... \cdot a_{\sigma(n),n} F(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)})$$

Aus 3. folgt nun aber auch $F(...,x,..,y,...) = -F(...,y,..,x,...)$; denn

$$0 = F(...,x+y,..,x+y,...) = F(...,x,..,x,...) + F(...,x,..,y,...) + F(...,y,..,x,...) + F(...,y,..,y,...);$$

denn F hat insbesondere dann den Wert 0, wenn zwei Argumente übereinstimmen. Daher sollte sein

$$F(\sum_{j=1}^{n} a_{j1}v_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{jn}v_j) = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1),1} \cdot ... \cdot a_{\sigma(n),n} \epsilon(\sigma) F(v_1, ..., v_n),$$

wobei $\epsilon(\sigma) = 1$, wenn man die Ziffern $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)$ durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen $i \leftrightarrow j$ in die natürliche Reihenfolge bringen kann und -1, wen man das mit einer ungeraden Anzahl solcher Vertauschungen bewerkstelligt. In dieser "Fallunterscheidung" liegt das Problem: Ist σ überhaupt Hintereinanderausführung solcher Vertauschungen, und wenn ja, kann es sein, daß man sowohl mit gerade vielen als auch mit ungerade vielen σ bewirken kann? Aber wir erkennen:

I. *Wenn* es eine Funktion F mit den Eigenschaften D1.-D3. gibt, dann ist sie durch den Wert $F(v_1,...,v_n)$ für eine Basis $v_1,...,v_n$ festgelegt: alle Funktionen mit D1.-D3. sind Vielfache einer einzigen unter ihnen.

II. Es gibt eine von 0 verschiedene Funtion F mit D1.-D3. genau dann, wenn es auf der Menge aller Permutationen von n Ziffern eine Funktion ϵ mit Werten ± 1 wie oben gibt.

Für II zur Bequemlichkeit etwas Hintergrund: Die Permutationen von $\{1,2,...,n\}$ bilden bei Hintereinanderausführung eine Gruppe, die sogenannte symmetrische Gruppe auf n Ziffern, bezeichnet mit S_n. Es gelten nämlich die "Gruppe" definierenden Regeln:

(i) $(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$ für alle ρ, σ, τ

(ii) $\rho\, id = \rho$ für alle ρ, wobei id die Permutation ist, die alle Ziffern festläßt.

(iii) Da die σ bijektiv sind, besitzt jedes σ eine Umkehrung τ, d.h. eine Permutation, die σ wieder rückgängig macht: $\sigma\tau = \tau\sigma = id$.

Zyklenschreibweise: Mit $(i_1, i_2, ..., i_k)$ wird diejenige Permutation bezeichnet, die i_1 auf i_2, i_2 auf i_3, ... und schließlich i_k wieder auf i_1 abbildet und alle Ziffern, die unter den i_ν nicht vorkommen, festläßt. Sie heißt ein k-Zyklus. 2-Zyklen werden auch Tranpositionen genannt, speziell heißen die Tranpositionen $(i, i+1)$ Nachbartranspositionen. Jede Permutation ist Hintereinanderausführung (wir sagen dafür auch kürzer "Produkt") von ziffernfremden Zyklen. Sei nämlich eine Permutation σ gegeben. Man schreibt nacheinander die successiven Bilder von σ auf: $\sigma(1) = k, \sigma(k) = l, \sigma(l) = m, ...$, bis man das erste Mal auf ein p mit $\sigma(p) = 1$ stößt. Wenn man dabei alle Ziffern 1,2,...,n verbraucht hat, dann ist $\sigma = (1, k, l, m, ..., p)$. Sonst nimmt man eine Ziffer r, die noch nicht vorkam, und bildet mit ihr den nächsten Zyklus $(r, \sigma(r), \sigma(\sigma(r)), ...)$. So fährt man fort, bis alle Ziffern verbraucht sind. Zyklen, die nur aus einer Ziffer bestehen, läßt man weg. σ ist dann das Produkt aller dieser Zyklen, wobei es auf die Reihenfolge nicht ankommt: ziffernfremde Zyklen sind vertauschbar. Zyklen, die eine Ziffer gemeinsam haben, sind i.a. nicht vertauschbar; Beispiel: $(123)(12) = (12)(132)$.

Nun zeigen wir im Hinblick auf II:

Satz 16.

(a) Jede Permutation ist Produkt von Transpositionen (die Identität ist das leere Produkt).

(b) Es gibt eine Funktion ϵ wie verlangt, nämlich

$$(*) \qquad \epsilon(\sigma) = (-1)^s \text{ wenn } s \text{ die Anzahl der Paare } i < j \text{ ist, für die } \sigma(i) > \sigma(j)$$

(Insbesondere kann man eine Permutation nie sowohl als Produkt von gerade vielen als auch von ungerade vielen Transpositionen schreiben).

Beweis: (a) durch Induktion nach n: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei $n > 1$ und die Behauptung für alle Permutationen auf m Ziffern mit $m < n$ bewiesen. Dann sei $\sigma \in S_n$ gegeben. Wenn $\sigma(n) = n$, dann bewirkt σ eine Permutation der Ziffern 1,2,...,n-1: fertig nach Induktionsannahme. Ist $\sigma(n) = k < n$, so gilt das für $\tau := (n, k)\sigma$.
(b) Wir zeigen, daß die Funktion ϵ, die durch $(*)$ definiert ist, multiplikativ ist. Für beliebige paarweise verschiedene Zahlen $x_1, ..., x_n$ gilt

$$\prod_{i<j}(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}) = \epsilon(\sigma)\prod_{i<j}(x_i - x_j) \neq 0$$

Man setzt $y_i = x_{\sigma(i)}$. Dann gilt einerseits

$$\epsilon(\tau)\prod_{i<j}(y_i - y_j) = \epsilon(\tau)\prod_{i<j}(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}) = \epsilon(\tau)\epsilon(\sigma)\prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

und anderseits

$$\epsilon(\tau)\prod_{i<j}(y_i - y_j) = \prod_{i<j}(y_{\tau(i)} - y_{\tau(j)}) = \prod_{i<j}(x_{\sigma\tau(i)} - x_{\sigma\tau(j)}) = \epsilon(\sigma\tau)\prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

Weil das Produkt nicht 0 ist, folgt

$$\epsilon(\sigma\tau) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)$$

$\epsilon(\sigma)$ heißt das Signum oder Vorzeichen der Permautation σ. Alle Transpositionen haben das Vorzeichen -1 (Aufgabe 29 a) und b)). Daraus folgt, daß die durch $(*)$ definierte Funktion ϵ die in II gewünschte Eigenschaft hat.

Bemerkung: Die Multiplikativität von ϵ impliziert, daß die Permutationen mit Vorzeichen +1 eine Untergruppe in der S_n bilden. Diese heißt die alternierende Gruppe A_n, ihre Elemente heißen gerade Permutationen. Für jede ungerade Permutation π ist $A_n \cup \pi A_n = S_n$.
Mit der Existenz von ϵ ist nun auch die Existenz einer von 0 verschiedenen Funktion F mit den Eigenschaften D1.-D3. bewiesen, und zwar:
Definition:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot .... \cdot a_{\sigma(n)n}$$

heißt die Determinante von A, Bezeichnung $|A|$.
Für jede Funktion F mit D1.-D3. gilt

$$(1) \qquad F(\sum_{j=1}^{n} a_{j1}v_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{jn}v_j) = |A| \cdot F(v_1, ..., v_n)$$

und umgekehrt ist für jede Vorgabe des Wertes $F(v_1, ..., v_n)$ durch (1) eine Funktion F mit D1.-D3. definiert.
Für die Determinante gilt der wichtige Multiplikationssatz:

Satz 17.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Beweis: $e_1, ..., e_n$ seien die Einheitsvektoren im R^n. Aus (1) folgt

$$|AB| \cdot F(e_1, ..., e_n) = F(ABe_1, ..., ABe_n) = |A|F(Be_1, ..., Be_n) = |A|\,|B|F(e_1, ..., e_n)$$

Da es F mit $F(e_1, ..., e_n) \neq 0$ gibt, folgt die Behauptung.

Weitere Eigenschaften der Determinante:

1. $|A|$ ändert sich nicht, wenn man ein Vielfaches einer Zeile von A zu einer andern Zeile addiert. Beweis: D1.-D3.
2. Die elementaren Matrizen $E_{ij}(\lambda)$ haben Determinate 1. (Spezialfall von 1).
3. Die Zahl d aus Kap.6 ist die Determinante der Matrix A, also in der Tat unabhängig von der Herstellungsweise der Gestalt $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & d \end{pmatrix}$.
4. Die Determinate einer Diagonalmatrix ist das Produkt der Diagonalglieder. Beweis: D2.
5. Bei Vertauschen zweier Spalten nimmt die Determinante ein Vorzeichen auf. Beweis: Das Entsprechende wurde oben für die Funktion F bewiesen.

Definition: Die Matrix A' mit den Koeffizienten $a'_{ij} = a_{ji}$ heißt die gestürzte Matrix (von A).

Satz 18.

$$|A'| = |A|$$

Beweis:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot .... \cdot a_{\sigma(n)n}$$

Für jeden Summanden ist

$$a_{\sigma(1)1} .....a_{\sigma(n)n} = a_{1\sigma^{-1}(1)} .....a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

kraft Umordnung der Faktoren. Mit σ durchläuft auch $\tau := \sigma^{-1}$ alle Permutationen, und $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$. Daraus folgt

$$|A| = \sum_{\tau \in S_n} \epsilon(\tau) a_{1\tau(1)} ....a_{n\tau(n)} = |A'|$$

Folgerung: Die Eigenschaften 1. bis 5. gelten genauso für Spalten statt Zeilen und umgekehrt.

Entwicklung nach einer Spalte:

$e_1, ..., e_n$ seien wie immer die Einheitsvektoren im R^n und $a^{(i)}$ die Spalten der Matrix A. Ist F eine Funktion mit D1.-D3. (hier $V = \mathrm{R}^n$) mit $F(e_1, ..., e_n) = 1$, so ist

$$|A| = F(\sum_{j=1}^n a_{j1} e_j, ..., \sum_{j=1}^n a_{jn} e_j) == F(a^{(1)}, ..., \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j, ..., a^{(n)})$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ji} F(a^{(1)}, ..., e_i, ..., a^{(n)}) \text{ nach D1. und D2.}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ji} \begin{vmatrix} a_{11} & .... & 0 & ... & a_{1n} \\ \vdots & .... & \vdots & ... & \vdots \\ a_{j1} & .... & 1 & & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & .... & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ nach Definition; } e_j \text{ steht in der } i\text{-ten Spalte}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ji} \begin{vmatrix} a_{11} & .... & 0 & ... & a_{1n} \\ \vdots & .... & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & .... & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & .... & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ nach 1. und der Folgerung zu Satz 18}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{ji} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

wobei A_{ji} aus A entsteht durch Streichen der j-ten Zeile und der i-ten Spalte. Aus den Formeln für die Determinante ist klar, daß $\left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{matrix}\right| = |B|$. Wir haben also:
Ist A_{ji} die Matrix, die aus A durch Streichen der j-ten Zeile und der i-ten Spalte entsteht, so ist

(1) $$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} |A_{ji}| \text{ für jedes} i = 1, ..., n \quad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Spalte)}$$

Da die Determinante sich beim Stürzen nicht ändert, gilt auch

(2) $$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \text{ f"ur } i = 1, ..., n \quad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)}$$

Definition Die Matrix $\tilde{A}$ mit den Koeffizienten

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}$$

heißt die Adjunkte von A.
In Ergänzung zu (2) betrachten wir

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ij} |A_{kj}| \text{ für } i \neq k$$

Dies ist die Entwicklung derjenigen Matrix nach der k-ten Zeile, in die man in Zeile k die Koeffizienten aus Zeile i eingetragen hat und alle anderen Zeilen beibehalten hat. In dieser Matrix stimmen Zeile i und k überein, also ist ihre Determinante 0:

(3) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{jk} = 0 \text{ für } i \neq k$$

(2) und (3) zusammen bedeuten $A \cdot \tilde{A} = |A| \cdot \mathbf{1}$. Dasselbe gilt für $\tilde{A} \cdot A$ (benutze (1) statt (2)). Wir halten fest

Satz 19.

$$\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = \mid A \mid \cdot \mathbf{1}$$

Anwendung: Wenn $|A| \neq 0$, *so liefert Satz 19 die Inverse von* A, *nämlich* $|A|^{-1} \tilde{A}$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ können wir, falls $|A| \neq 0$, eine Formel für die Lösung angeben:

$$x = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} b$$

Komponentenweise

$$x_i = \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} b_j = \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}|A_{ji}|b_j$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{11} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \text{ Cramersche Regel}$$

Diese Formel ist natürlich völlig ungeeignet, wenn man die Lösung x wirklich berechnen will. Dazu eignet sich besser das Matrix- Invertierungsverfahren aus Kap.6. Aber sie ist von theoretischem Interesse, weil man zum Beispiel bei Gleichungssystemen mit ganzen Koeffizienten sehen kann, wie groß die Nenner der Lösungen höchstens sein können (besser: welche Primfaktoren mit welchen Exponenten höchstens im Nenner aufgehen).

Wir fügen den gleichwertigen Bedingungen von Satz 14 eine weitere hinzu, die aus Satz 19 abzulesen ist:

Satz 20. *Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht 0 ist.*

Beweis:

$$\text{"} \Rightarrow \text{"} : AB = \mathbf{1} \Rightarrow |A||B| = 1 \text{ (Satz 17)} \Rightarrow |A| \neq 0$$

$$\text{"} \Leftarrow \text{"} : |A| \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{|A|}\tilde{A} \cdot A = \mathbf{1} \text{ (Satz 19)}$$

Verallgemeinerung

Satz 21. *Die rechteckige Matrix $A = A_{m,n}$ habe Rang k. Dann gilt*
a) Alle $(k+1)$-reihigen Unterdeterminanten sind 0
b) Es gibt eine k-reihige Unterdeterminante, die nicht 0 ist.

Beweis: a) Sei B eine $(k+1)$-reihige quadratische Untermatrix von A, etwa

$$B = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_{k+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_{k+1} j_1} & \dots & a_{i_{k+1} j_{k+1}} \end{pmatrix}$$

Nach Voraussetzung sind die Spalten Nummer $j_1, ..., j_{k+1}$ von A linear abhängig. Erst recht sind die Spalten von B linear abhängig. Also $|B| = 0$ nach Satz 20.
b) Nach Voraussetzung gibt es in A k linear unabhängige Spalten, etwa Nummer $j_1, ..., j_k$. Dann hat die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \dots & a_{1j_k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{mj_1} & \dots & a_{mj_k} \end{pmatrix}$$

den Rang k. Da Zeilenrang = Spaltenrang, enthält sie auch k linear unabhängige Zeilen. Die aus diesen bestehende Untermatrix C von B hat $|C| \neq 0$.

Die Determinante eines Endomorphismus.

Definition: Eine lineare Abbildung ϕ eines Vektorraumes V in sich heißt ein Endomorphismus von V.

Sei $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V und

$$\phi v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j$$

Behauptung: $|A|$ ist von der Wahl der Basis unabhängig.
Beweis: Sei $w_1, ..., w_n$ eine andere Basis. Man hat

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} v_j \text{ und } v_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ji} w_j$$

und für die Matrizen S und T gilt $ST = TS = \mathbf{1}$. Bezüglich der Basis $w_1, ..., w_n$ findet man durch Einsetzen

$$\phi w_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} w_j \text{ mit } b_{ji} = \sum_{k,l=1}^{n} s_{jk} a_{kl} t_{li}, \text{ also } B = SAT$$

Es folgt $|B| = |SAT| = |S||A||T| = |A|$.
Definition: Die (von der Basiswahl unabhängige) Determinante von A heißt die Determinante des Endomorphismus ϕ.
1. Beispiel: ϕ sei eine Scherung: $\phi x = x + f(x)b$ mit $f(b) = 0$. Offenbar ist $\phi x = x$ genau dann wenn $f(x) = 0$. Wenn $f \neq 0$, dann gibt es einen Vektor $e \in V$ mit $f(e) = 1$. Für beliebiges x in V ist

$$x = f(x)e + (x - f(x)e)$$

und der zweite Summand liegt nach Konstruktion im Kern von f. Diese Zerlegung zeigt: Wenn $u_2, ..., u_n$ eine Basis von Kern f bilden, dann bilden $e, u_2, ..., u_n$ eine Basis von V. Dabei können wir nach dem Basisergänzungssatz noch $u_2 = b$ nehmen. Bezüglich dieser Basis hat ϕ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & .... & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

also die Determinante 1.
2. Beispiel: Dasselbe im R^n: Jede lineare Abbildung $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ (sogenannte Linearform) hat die Gestalt $f(x) = a'x$. Die Scherung mit Vektor b und Linearform f wird bezüglich der Standardbasis des R^n durch die Matrix $\mathbf{1} + ba'$ beschrieben. Nach dem ersten Beispiel hat sie die Determinante 1: Jede Matrix der Gestalt $\mathbf{1} + ba'$ mit $a'b = 0$ hat Determinante 1. Ein scharfer Blick spart manchmal viel Rechnung!
Zum Schluß noch etwas Struktur: Die invertierbaren $n \times n$-Matrizen bilden eine Gruppe; sie heißt die allgemeine lineare Gruppe und wird mit $GL(n, \mathrm{R})$ bezeichnet. Die Matrizen mit Determinante 1 bilden eine Untergruppe, die sog. spezielle lineare Gruppe $SL(n, \mathrm{R})$. Nach Satz 15 ist $A \in SL(n, \mathrm{R})$ genau dann, wenn A ein Produkt von elementaren Matrizen ist. Jede elementare Matrix ist ein sogenannter Kommutator $XYX^{-1}Y^{-1}$, nämlich wenn D eine Diagonalmatrix mit $d_i = 2d_k$ ist, dann rechnet man nach, daß

$$DE_{ik}(\lambda)D^{-1}E_{ik}(\lambda)^{-1} = E_{ik}(\lambda)$$

Hieraus schließen wir

Satz 22. *Jede multiplikative reellwertige Funktion auf* $GL(n, \mathrm{R})$ *ist eine Funktion der Determinante.*

Beweis: Als multiplikative Funktion ist h entweder identisch oder niemals 0. Sei also h nicht 0. Da die Werte von h reelle Zahlen sind, folgt $h(XY) = h(X)h(Y) = h(Y)h(X)$. Daraus folgt, daß h auf allen Kommutatoren den Wert 1 hat. Also ist $h(X) = 1$ für alle $X \in Sl(n, \mathrm{R})$. Man definiert die Funktion $f : \mathrm{R}^* \to \mathrm{R}^*$ durch $f(x) = h(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & x \end{pmatrix})$. Schreibt man $A = E \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & d \end{pmatrix}$ mit $E \in SL(n, \mathrm{R})$ gemäß Satz 15, so folgt $h(A) = f(d) = f(|A|)$.

8. Symmetrische Bilinearformen.

Sei V ein Vektorraum.
Definition 1 : Eine reellwertige Funktion F auf $V \times V$ heißt Bilinearform, wenn $F(x,y)$ bei festem y linear in x und bei festem x linear in y ist. F heißt symmterisch, wenn zudem $F(x,y) = F(y,x)$ für alle $x, y \in V$.

Beispiele:
 * $V = \mathrm{R}^n$, $F(x,y) = x'y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = y'x$.
 * $V =$ Vektorraum aller reellwertigen stetigen Funktionen auf $[0,1]$ und

$$F(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$$

 * $V = \mathrm{R}^2$, $F(x,y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

Wir wählen eine Basis $v_1, ..., v_n$ in V . Dann ist F durch die Werte $F(v_i, v_j)$ ($i,j = 1,...,n$) bestimmt; nämlich x und y besitzen eindeutig bestimmte Darstellungen

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \text{ und } y = \sum_{i=1}^n y_i v_i,$$

und aus der Definition folgt

$$F(x,y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j F(v_i, v_j) = (x_1, ..., x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

wobei A die Matrix mit den Koeffizienten $a_{ij} = F(v_i, v_j)$ ist. In den Beispielen ist
 * $A = \mathbf{1}$
 * Wir nehmen den n -dimensionalen Teilraum der Polynome $< n$ -ten Grades mit Basis $1, t, ..., t^{n-1}$. Es ist

$$F(t^i, t^j) = \int_0^1 t^{i+j} dt = \frac{1}{i+j+1}$$

 also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{n} & & & & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}$$

 * $F(e_1, e_1) = 0,\ F(e_1, e_2) = 1,\ F(e_2, e_2) = 0$ impliziert $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 Wir haben

$$\{ \text{ symmetrische Bilinearformen } \} \overset{\text{nach Basiswahl}}{\longleftrightarrow} \{ \text{ symmetrische Matrizen } \}$$

Wieder fragen wir: Wie ändert sich A bei Basiswechsel? Antwort: Wenn $w_1, ..., w_n$ eine andere Basis, so wird

$$F(w_i, w_j) \sum_{k,l=1}^n t_{ki} t_{lj} F(v_k, v_l)$$

|| Bei Basiswechsel wird A ersetzt durch $T'AT$ mit einer invertierbaren Matrix T .
Wieder stellt sich die Frage, ob man A durch geschickte Basiswahl besonders einfach machen kann.

Satz 22. *Zu jeder symmetrischen Bilinearform F gibt es eine Basis $v_1, ..., v_n$ von V mit $F(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$.*

Beweis: Wenn $F = 0$, ist nichts zu zeigen. Wenn $F \neq 0$, so gibt es $a \in V$ mit $F(a, a) \neq 0$; denn wären alle $F(x, x) = 0$, so auch alle

$$F(x + y, x + y) - F(x, x) - F(y, y) = 2F(x, y)$$

Für ein solches (festes) a zerlegt man ein beliebiges x

$$x = \frac{F(x, a)}{F(a, a)} \cdot a + (x - \frac{F(x, a)}{F(a, a)} \cdot a)$$

Für den zweiten Summanden y gilt nach Konstruktion $F(y, a) = 0$. Die Vektoren u mit $F(u, a) = 0$ bilden einen $(n - 1)$-dimensionalen Teilraum von V. Dieser besitzt nach Induktionsannahme eine Basis der gewünschten Art. Diese wird durch a zu einer solchen von V ergänzt.

Übersetzung in Matrizensprache:

Satz 22'. *Zu jeder symmetrischen Matrix A gibt es eine invertierbare Matrix T so, daß $T'AT$ eine Diagonalmatrix ist.*

Zusatz: Ist $F(v_i, v_i) = \alpha > 0$, so besitzt α eine reelle Wurzel $\sqrt{\alpha}(> 0)$, und für $w_i := \frac{1}{\sqrt{\alpha}} v_i$ ist $F(w_i, w_i) = 1$. Genauso kann man v_i durch ein w_i mit $F(w_i, w_i) = -1$ ersetzen, falls $F(v_i, v_i) < 0$. So erhält man in der Diagonalen nur $1, -1$ oder 0.

Satz 23. *(Sylvesterscher Trägheitssatz) Zu jeder rellen symmetrischen Matrix A gibt es eine invertierbare Matrix T so, daß*

$$T'AT = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & & 0 \\ & -\mathbf{1}_q & \\ & & 0_s \end{pmatrix}$$

Die Zahlen p, q, r sind durch A bestimmt (d.h. von T unabhängig)

Beweis: Daß es überhaupt geht, sahen wir schon. s ist offenbar $= n -$ Rang A, also durch A bestimmt. Seien nun $v_1, ..., v_n$ und $v_1^*, ..., v_n^*$ zwei Basen von V mit

$$F(v_i, v_i) = 1 \text{ für } 1 \leq i \leq p \text{ und } F(v_i, v_i) = -1 \text{ für } p + 1 \leq i \leq p + q \text{ und } F(v_i, v_j) = 0 \text{ sonst.}$$

entsprechend alles mit $*$. Zu zeigen ist $p = p^*$ (dann ist auch $q = q^*$, weil $p + q = n - s = p^* + q^*$). Zu dem Zweck beweisen wir zunächst: $v_1, ..., v_p, v_{p^*+1}^*, ..., v_n^*$ sind linear unabhängig. Beweis: Angenommen, es gäbe eine lineare Relation zwischen ihnen. Diese stellen wir so um, daß wir eine Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p = \mu_{p^*+1} v_{p^*+1} + ... + \mu_n v_n^*$$

erhalten. Wir nennen diesen Vektor v und berechnen auf beiden Seiten $F(v, v)$:

$$F(v, v) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 F(v_i, v_i) = \sum_{i=p^*+1}^{n} \mu_i^2 F(v_i^*, v_i^*) \tag{1}$$

Da Quadrate reeller Zahlen ≥ 0 sind, ist nach Bedeutung von p und p^* die linke Seite ≥ 0 und die rechte ≤ 0. Also sind sie beide 0, und das impliziert (da die linken $F(v_i, v_i) > 0$, daß $\lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$. Dann folgt aus (1) und der linearen Unabhängigkeit der v_i^*, daß auch alle $\mu_i = 0$.
Mehr als n linear unabhängige Vektoren kann es in V nicht geben, also folgt $p + (n - p^*) \leq n$, d.h. $p \leq p^*$. Man vertauscht die Rollen von p und p^* und erhält genauso $p^* \leq p$, zusammen $p = p^*$.

Spezialfall: $p = n$. Dann ist $T'AT = \mathbf{1}$, und für alle $x \in \mathrm{R}^n, x \neq 0$, gilt $0 < \sum_{i=1}^n x_i^2 = x'x = (Tx)'A(Tx)$. Mit x durchläuft auch Tx den ganzen R^n, es gilt also $x'Ax > 0$ für alle $x \neq 0$.
Definition: Eine n-reihige symmetrische Matrix heißt positiv definit, wenn $x'Ax > 0$ für alle $x \neq 0$.

Definition: Eine symmetrische Bilinearform F auf dem Vektorraum V heißt positiv definit, wenn $F(v, v) > 0$ für alle $v \in V, v \neq 0$.

Ein Kriterium, welches einem Rechner erlaubt zu prüfen, ob eine Matrix positiv deinit ist, lautet

Satz 24. *A ist positiv definit genau dann, wenn alle "Hauptunterdeterminanten"*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .... & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & .... & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \text{ für } i = 1, ..., n$$

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Mit A sind auch alle Untermatrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{ii} \end{pmatrix}$ psoitiv definit (Man setzt in den Testvektoren für A die letzten $n-i$ Komponenten 0). Für " $\Rightarrow$ " genügt es also zu zeigen, daß positiv definite Matrizen positive Determinanten haben. Nun gibt es zu jeder positiv difniten Matrix A eine invertierbare Matrix T mit $T'AT = \mathbf{1}$. Dann ist $1 = |T'AT| = |T|^2|A|$, also $|A| > 0$.
" $\Leftarrow$ ": Man schreibt

$$A = \begin{pmatrix} B & u \\ u' & \alpha \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathrm{R}, u \in \mathrm{R}^n \text{ und } B = B_{n-1,n-1} = B'$$

Man entwickelt A nach der letzten Spalte und dann die Unterdeterminanten außer B (also die, die die Zeile u' enthalten) nach der letzten Zeile u':

$$|A| = \alpha|B| + \sum_{i=1}^{n-1} u_i(-1)^{i+n}|A_{in}|$$

$$= \alpha|B| + \sum_{i=1}^{n-1} u_i(-1)^{i+n} \sum_{j=1}^{n-1} u_j(-1)^{n-1+j}|B_{ij}|$$

$$= \alpha|B| - \sum_{i,j=1}^{n-1} (-1)^{i+j}|B_{ij}|\, u_i u_j = \alpha|B| - u'\tilde{B}u$$

wo $\tilde{B}$ die Adjunkte von B ist. Weil $|B| \neq 0$, ist $\tilde{B} = |B|B^{-1}$ und

$$|A| = |B|(\alpha - u'B^{-1}u)$$

Da $|A| > 0$ und $|B| > 0$, folgt

(1) $$\alpha > u'B^{-1}u$$

Nun testen wir A: Sei $z \in \mathrm{R}^n$ beliebig. Man kann z in der Gestalt $\begin{pmatrix} B^{-1}x \\ \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathrm{R}$ und $x \in \mathrm{R}^{n-1}$ annehmen. Damit ist

$$z'Az = (\, x'B^{-1}, \quad \lambda\,) \begin{pmatrix} B & u \\ u' & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1}x \\ \lambda \end{pmatrix} = x'B^{-1}x + 2\lambda u'B^{-1}x + \alpha\lambda^2$$

$$= (x + \lambda u)'B^{-1}(x + \lambda u) + \lambda^2(\alpha - u'B^{-1}u)$$

Nach Induktionsannahme ist B und damit auch B^{-1} positiv definit, also der erste Summand > 0 außer wenn $x + \lambda u = 0$. Nach (1) kann $z'Az$ nur dann ≤ 0 sein, wenn sowohl $x + \lambda u = 0$ als auch $\lambda = 0$. Dann ist aber auch $x = 0$ und damit $z = 0$.
Beispiel: Alle Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & .... & 1 \\ 1 & 2 & .... & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & .... & 2 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 33 sind positiv definit; denn die n-te Unterdeterminante hat den Wert $n+1$.

Verfahren zur Auffindung einer Basis $u_1, ..., u_n$ von V mit $F(u_i, u_j) = \delta_{ij}$, falls F positiv definit: (Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)
Sei $v_1, ..., v_n$ eine vorgegebene Basis und $F(v_i, v_j) = a_{ij}$.

$$\begin{array}{lllllllll} f_1 & = & v_1 & & & & & & \\ f_2 & = & \lambda_2 v_1 & + & v_2 & & & & \text{so, daß } F(f_2, v_1) = 0 \\ f_3 & = & \lambda_3 v_1 & + & \mu_3 v_2 & + & v_3 & & \text{so, daß } F(f_3, v_1) = F(f_3, v_2) = 0 \\ & & \vdots & & & & & & \\ f_n & = & \lambda_n v_1 & + & \mu_n v_2 & + & ... & + \; v_n & \text{so, daß } F(f_n, v_i) = 0 \text{ für } i < n \end{array}$$

Dazu muß beim k-ten Schritt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda a_{11} & + & \mu a_{21} & + & .... & + & \xi a_{k-1,1} & = & -a_{k1} \\ \lambda a_{12} & + & \mu a_{22} & + & .... & + & \xi a_{k-1,2} & = & -a_{k2} \\ \vdots & & & & & & & & \\ \lambda a_{1,k-1} & + & \mu a_{2,k-1} & + & .... & + & \xi a_{k-1,k-1} & = & -a_{k,k-1} \end{array}$$

gelöst werden. Dies ist möglich (sogar eindeutig), weil F (und damit die Matrix A) positiv definit ist und deshalb nach Satz 24 alle diese Unterdeterminanten nicht 0 sind. Nach Konstruktion ist

$$< v_1, ..., v_k > = < f_1, ..., f_k > \text{ für } k = 1, ..., n \text{ und } F(f_k, x) = 0 \text{ für alle } x \in < v_1, ..., v_{k-1} >,$$

insbesondere für $x = f_1, ..., f_{k-1}$. Also ist $F(f_i, f_k) = 0$ für alle $i \neq k$ (wegen der Symmetrie). Bleibt noch, die f_i zu normieren:

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{F(f_i, f_i)}} \cdot f_i$$

Beispiel: V = Vektorraum der reellen Polynome ≤ 2-ten Grades mit Basis $v_1 = 1, v_2 = t, v_3 = t^2$ und $F(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$.

$$\begin{array}{rcc} f_1 = 1 & F(f_1, f_1) = 1 & u_1 = 1 \\ f_2 = t - \frac{1}{2} & F(f_2, f_2) = \frac{1}{12} & u_2 = 2\sqrt{3}(t - \frac{1}{2}) \\ f_3 = t^2 - t + \frac{1}{6} & F(f_3, f_3) = \frac{1}{72} & u_3 = 6\sqrt{2}(t^2 - t + \frac{1}{6}) \end{array}$$

Übersetzung in Matrizensprache: Der Übergang von den v_i zu den u_i wird durch eine Dreiecksmatrix bewirkt. Diese (oder ihre Inverse) können wir aus der Formenwertmatrix A auch auf folgende Weise berechnen: Für eine (obere) Dreicksmatrix T mit positiver Diagonale ist $T'T = A$ gleichbedeutend mit

$$\begin{gathered} t_{11}^2 = a_{11},\ t_{11}t_{1k} = a_{1k} \text{ für } k = 2, .., n \\ t_{12}^2 + t_{22}^2 = a_{22},\ t_{12}t_{1k} + t_{22}t_{2k} = a_{2k} \text{ für } k = 3, ..., n \\ \vdots \\ t_{1n}^2 + t_{2n}^2 + ... + t_{nn}^2 = a_{nn} \end{gathered}$$

Dieses System ist offenbar rekursiv nach den t_{ij} auflösbar, und zwar mit den Nebenbedingung $t_{ii} > 0$ eindeutig.

Anwendung: Sei X eine beliebige invertierbare Matrix. Dann ist $X'X$ positiv definit und daher auch $= T'T$ mit einer Dreiecksmatrix T, deren t_{ii} alle > 0 sind. Für die Matrix $K = XT^{-1}$ gilt dann $K'K = \mathbf{1}$.

Definition: Eine Matrix K mit $K'K = \mathbf{1}$ heißt orthogonal.
Daß eine Matrix K mit den Spalten $k^{(1)}, ..., k^{(n)}$ orthogonal ist, bedeutet nach Definition, daß $k^{(i)}k^{(j)} = \delta_{ij}$ für alle i, j. Die symmetrische Bilinearform $F(x, y) = x'y = y'x$ auf R^n nennt man auch das (Standard)-Skalarprodukt auf R^n. Statt mit $x'y$ bezeichnet man es auch mit (x, y). Man nennt zwei Vektoren x und y senkrecht, wenn $(x, y) = 0$. Man definiert die positive Zahl $|x|$ durch $|x|^2 = (x, x)$ und nennt sie die Länge von x. Die Vektoren mit Länge 1 nennt man Einheitsvektoren. Ein System von paarweise senkrechten Einheitsvektoren nennt man ein Othonormalsystem. Die Spalten einer orthogonalen Matrix bilden ein Orthonormalsystem. Zurück zur Anwendung:

Satz 25. *Jede invertierbare Matrix X läßt sich zerlegen in*

$$X = KT \text{ wobei } K \text{ orthogonal und } T \text{ dreieckig mit positiver Diagonale}$$

Diese Zerlegung ist eindeutig.

Beweis der Eindeutigkeit: Sei $X = KT = LS$. Dann ist $L^{-1}K = ST^{-1}$ sowohl dreieckig als auch orthogonal und hat positive Diagonalelemente. Eine solche Matrix ist $\mathbf{1}$: die erste Spalte ist ein Einheitsvektor und hat nur einen (positiven) Eintrag $\neq 0$, dieser muß also 1 sein. Alle andern Spalten sind auf dieser senkrecht und können deshalb keinen Eintrag $\neq 0$ in der ersten Zeile haben. Weiter mit der zweiten Spalte, sie hat jetzt nur noch einen Eintrag, nämlich in der zweiten Zeile, usw.

Die Abbildung $x \mapsto Kx$ mit einer orthogonalen Matrix nennt man eine orthogonale Transformation. Ihre typische Eigenschaft ist, daß sie alle Skalarprodukte $x'y$ ungeändert läßt:

$$K'K = \mathbf{1} \Leftrightarrow (Kx)'Ky = x'K'Ky = x'y \text{ für alle } x, y$$

Aus $K'K = \mathbf{1}$ folgt ferner $|K| = \pm 1$. Man sagt, die Spalten einer Matrix A bilden ein Rechtssystem, wenn $|A| > 0$.

$n = 2$: Die Matrix $K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist orthogonal, wenn $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ zwei zueinander senkrechte Einheitsvektoren sind. Es gibt im Intervall $[0, 2\pi)$ genau einen Winkel α, so daß $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$. Dann gibt es für die zweite Spalte genau zwei Möglichkeiten, nämlich

$$K = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ und } K = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Im ersten Fall ist $|K| = 1$. Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es gibt genau einen Einheitsvektor x^*, der auf x senkrecht steht und für den x, x^* ein Rechtssystem ist, nämlich $x^* = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Man sieht $Kx = \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot x^*$, und es gilt $(x, Kx) = \cos\alpha$ für alle x mit $|x| = 1$.
Im zweiten Fall ($|K| = -1$) findet man, daß der Vektor $\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 1 - \cos\alpha \end{pmatrix}$ bei K festbleibt. Für $\alpha \neq 0$ ist er nicht 0 und spannt mit seinem Orthokomplement , welches durch K mit -1 multipliziert wird, zusammen die Ebene auf: K bewirkt eine Spiegelung. (Für $\alpha = 0$ ist die x_1-Achse die Fixgerade).
Zurück in den R^n: Sei $0 \neq s \in \mathrm{R}^n$.
Definition:

$$Sx = x - 2\frac{(x, s)}{(s, s)}s \text{ heißt die Spiegelung längs } s$$

S ist die einzige orthogonale Transformation, die

$$s^\perp := \{x \in \mathrm{R}^n \mid (x, s) = 0\}$$

elementweise fest läßt und s nach $-s$ abbildet. Es gilt $S^2 = 1$ und $|S| = -1$.

Satz 26. *Jede orthogonale Transformation im R^n ist Produkt von höchstens n Spiegelungen.*

Beweis: $e_1, .., e_n$ sei die Standard-Orthonormalbasis im R^n. ϕ sei eine orthogonale Transformation. Induktion nach n:
1. $n = 1$: $\phi e_1 = \pm e_1$, $\phi =$ Identität oder Spiegelung längs e_1.
$n > 1$. Wenn $\phi e_n = e_n$, fertig nach Induktionsannahme. Sonst sei $s = e_n - \phi e_n$ und $Sx = x - 2\frac{(x,s)}{(s,s)}$.
Offenbar ist $(s, s) = (e_n, e_n) - 2(e_n, \phi e_n) + (\phi e_n, \phi e_n) = 2(e_n, e_n - \phi e_n) = 2(e_n, s)$. Es folgt $Se_n = e_n - (e_n - \phi e_n) = \phi e_n$,also $e_n = S\phi e_n$. Nach Induktionsannahme ist $S\phi = S_1 \cdot \ldots \cdot S_k$ mit $k \leq n - 1$. Also ist ϕ Produkt von höchstens n Spiegelungen.

9. Etwas Geometrie im R^3

Aus Satz 26 folgt: Jede orthogonale Transformation im R^3 mit Determinante 1 ist ein Produkt von zwei Spiegelungen. Dies impliziert

Satz 27. *Jede orthogonale Transformation im* R^3 *mit Determinante 1 läßt einen Vektor* $\neq 0$ *fest.*

Beweis: Wenn $\phi = ST$, so bleiben alle Vektoren $\perp s, t$ bei ϕ fest.

Ist $\phi \neq 1$, so sind s und t linear unabhängig, und $s^\perp \cap t^\perp =< a >$ mit oE $|a| = 1$. Die Ebene $a^\perp$ wird bei ϕ auf sich abgebildet. Diese Situation läßt sich bequem mit dem sogenannten Vektorprodukt oder Kreuzprodukt beschreiben, dem wir uns deshalb jetzt zuwenden:

Definition: Für zwei Vektoren $x, y \in \mathrm{R}^3$ heißt der Vektor

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \text{ ihr Vektorprodukt oder Kreuzprodukt .}$$

Eigenschaften:

1. Für alle $x, y, z \in \mathrm{R}^3$ gilt $(x, y \times z) = \det(x, y, z)$. (Wir hatten zwar die Determinante bis jetzt einfach mit $|\ |$ bezeichnet. Aber jetzt kommen soviele Absolutbeträge oder Normen vor, daß die Formeln leichter zu lesen sind, wenn man die aus drei Spaltenvektoren gebildete Determinante mit det bezeichnet). Beweis der Formel: Determinanten-Entwicklungssatz.
2. $x \times y$ ist senkrecht auf x und auf y. Das ist eine unmittelbare Folge von 1. (Determinante mit zwei gleichen Spalten).
3. $x \times (y \times z) = (x, z)y - (x, y)z$ (Graßmann-Identität) Beweis: Wir nehmen an, daß y und z linear unabhängig und nicht beide auf x senkrecht sind. Dann folgt daraus, daß die linke Seite senkrecht auf $y \times z$ ist, daß sie eine Linearkombination von y und z ist. Und $< y, z > \cap x^\perp$ ist eindimensional; daher sind beide Seiten proportional. Vergleich der ersten Komponenten (falls diese nicht 0 sind) zeigt, daß der Proportionalitätsfaktor 1 ist. Statt nun die Ausnahmefälle, in denen irgendeine Determinante oder ein Skalarprodukt 0 ist, einzeln durchzudiskutieren, benutzen wir das Prinzip: Wenn $P_1, ..., P_k$ und $Q \neq 0$ Polynome sind und wenn $P_1(x) = ... = P_k(x) = 0$ für alle $x \in \mathrm{R}^n$, für die $Q(x) \neq 0$, dann sind $P_1(x) = ... = P_k(x) = 0$ für alle x (Der R^n ist nicht Vereinigung von endlich vielen echten "algebraischen Teilmengen"). Übung: Man diskutiere doch die Ausnahmefälle.
4. $$(x \times y, u \times v) = \left| \begin{matrix} (x,u) & (x,v) \\ (y,u) & (y,v) \end{matrix} \right| \text{ insbesondere}$$

   $$|x \times y|^2 = \left| \begin{matrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{matrix} \right| \text{ (Gramsche Determinante von } x \text{ und } y\text{)}$$

   Beweis:

   $$(x \times y, u \times v) = \det(x \times y, u, v) \text{ nach 1.}$$

   $$= \det(v, x \times y, u) = (v, (x \times y) \times u) \text{ wieder nach 1.}$$

   $$= (v, (u, x)y - (u, y)x) \text{ nach 3 }) = (x, u)(y, v) - (y, u)(x, v)$$

5. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

   $$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

   Beweis: Sind x und y proportional, so sind beide Seiten gleich. Sonst ist für jedes reelle λ

   $$0 < (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) - 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y) = (y, y)(\lambda - \frac{(x, y)}{(y, y)})^2 + (x, x) - \frac{(x, y)^2}{(y, y)}$$

   Mit $\lambda = \frac{(x,y)}{(y,y)}$ folgt die Behauptung.

Insbesondere ist für alle $x, y \neq 0$ die Zahl $\frac{(x,y)}{|x||y|}$ dem Betrage nach ≤ 1. Daher gibt es genau ein α mit $0 \leq \alpha \leq \pi$ und $\cos\alpha = \frac{(x,y)}{|x||y|}$. Dieses α ist (nach Definition) der Winkel zwischen x und y.

6.

$$|x \times y| = |x||y| \sin\alpha$$

Beweis: Nach 4. ist

$$|x \times y|^2 = |x|^2|y|^2 - (x,y)^2 = |x|^2|y|^2(1-\cos^2\alpha) = |x|^2|y|^2\sin^2\alpha$$

Daraus folgt die Behauptung, weil $\sin\alpha \geq 0$ für $0 \leq \alpha \leq \pi$.

E sei eine Ebene im R^3. Man wählt zwei Vektoren a und b, die E aufspannen. In $E^\perp$ wählt man c so, daß $\det(a,b,c) > 0$ und nennt c eine positiv orientierte Normale zu E. Man beachte, daß c von der Basiswahl in E abhängt: vertauscht man zum Beispiel a und b, so muß man c durch $-c$ ersetzen. Genau alle Basen, die aus a, b durch eine Matrix mit positiver Determinante hervorgehen, liefern $c's$, die sich um einen positiven Faktor unterscheiden. Man sagt, a und b legen eine Orientierung von E fest, und man orientiert $E^\perp = < c >$ so, daß a, b, c ein Rechtssystem bilden. Die formale Definition von Orientierung ist: Eine Orientierung eines Vektorraumes ist eine (der beiden) Äquivalenzklassen von Basen von V bezüglich der Äquivalenzrelation: $v_1, ..., v_n \sim w_1, ..., w_n$, wenn die Übergangsdeterminante von den v_i zu den w_j positiv ist. Geht man also davon aus, daß die natürliche Basis $e_1, ..., e_n$ des R^n positiv orientiert ist, so sind die Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ genau dann positiv orientiert, wenn $|A| > 0$.

Nimmt man in E die Basis a, b, so wird die zugehörige Orientierung der Normalen gegeben durch $c = a \times b$; denn $\det(a, b, a \times b) = (a \times b, a \times b) > 0$. Als Winkel zwischen zwei Ebenen bezeichnet man den Winkel zwischen den positiv orientierten Normalen. Der Winkel zwischen zwei Ebenen hängt also von deren Orientierung ab.

Eine kleine Anwendung des Vektorprodukts in der sphärischen Trigonometrie: Drei Einheitsvektoren (von denen wir annehmen, daß sie positiv orientiert sind) bilden ein Dreieck auf der Sphäre $|x| = 1$.

Die Winkel zwischen ihnen werden durch die Großkreisbögen auf der Sphäre gemessen und sollen nach Voraussetzung > 0 und $< \pi$ sein. Es ist

$$(b,c) = \cos A, \quad (a,c) = \cos B, \quad (a,b) = \cos C \text{ und}$$

$$\cos\alpha = \frac{(a \times c, a \times b)}{|a \times c||a \times b|} \cos\beta = \frac{(b \times a, b \times c)}{|b \times a||b \times c|} \cos\gamma = \frac{(c \times b, c \times a)}{|c \times b||c \times a|}$$

7.

$$\sin\alpha \sin B \sin C = \det(a,b,c)$$

Beweis:

$$\sin\alpha \sin B \sin C = \sin\alpha |a \times c||a \times b| = |(a \times c) \times (a \times b)|$$

$$= |(a \times c, b)a - (a \times c, a)b| = |\det(a,c,b)a| = \det(a,b,c)$$

Durch zyklische Vertauschung von a, b, c und Division durch $\sin A \sin B \sin C$ erhält man den

Sinussatz.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

Weiter gilt

$$\cos\alpha\sin B\sin C = \cos\alpha|a\times c||a\times b| == (a\times c, a\times b) = (a,a)(b,c)-(a,b)(a,c) = \cos A - \cos B\cos C$$

Das ist der

Cosinussatz.

$$\cos A = \cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha$$

Anwendung: Wie weit ist es auf dem Großkreis von Paris nach Berlin?

Länge von Paris	$\lambda_P = 2,3^o o$	Breite von Paris	$\phi_P = 48,8^o n$
Länge von Berlin	$\lambda_B = 13,4^o o$	Breite von Berlin	$\phi_B = 52,5^o n$

$$B = 90-48,8 = 41,2,\ A = 90-52,5 = 37,5,\ \gamma = 13,4-2,3 = 11,1$$

$$\cos C = \cos A\cos B + \sin A\sin B\cos\gamma \approx 0,9905$$

$C \approx 7,904^o$, bei einem Erdradius von ungefähr 6378 km macht das etwa 880 km.

Benutzung des Vektorprodukts zur Beschreibung von Drehungen um eine Achse: T sei eine orthogonale Transformation des R^3 mit Determinante 1. Wir sahen: Es gibt a mit $Ta = a$, oE $|a| = 1$, und T bewirkt eine Transformation von $a^\perp$. Sei $x \in a^\perp$ und $|x| = 1$. Dann bilden $x, a\times x, a$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis. Die in $a\perp$ bewirkte Drehung wird beschrieben durch

$$Tx = \cos\alpha\ x + \sin\alpha\ (a\times x),\ 0\le\alpha<\pi$$

Dieselbe Gleichung gilt dann auch für λx, d.h. ohne die Einschränkung $|x| = 1$. Ist $x\in\mathrm{R}^3$ beliebig, so zerlegt man

$$x = (x,a)a + (x-(x,a)a),$$

und der zweite Summand ist senkrecht auf a. Daher

$$Tx = (x,a)a + \cos\alpha\ (x-(x,a)a) + \sin\alpha\ (a\times(x-(x,a)a)) = (1-\cos\alpha)(x,a)a + \cos\alpha\ x + \sin\alpha\ (a\times x)$$

Die Kreuzmultiplikation kann man auch als Matrixmultiplikation schreiben:

$$a\times x = \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Nun liest man die Matrix ab, die T bewirkt und die (ein ganz klein bißchen schlampig) auch mit T bezeichnet wird

$$T = \begin{pmatrix} (1-\cos\alpha)a_1^2 + \cos\alpha & (1-\cos\alpha)a_1a_2 - a_3\sin\alpha & (1-\cos\alpha)a_1a_3 + a_2\sin\alpha \\ (1-\cos\alpha)a_2a_1 + a_3\sin\alpha & (1-\cos\alpha)a_2^2 + \cos\alpha & (1-\cos\alpha)a_2a_3 - a_1\sin\alpha \\ (1-\cos\alpha)a_3a_1 - a_2\sin\alpha & (1-\cos\alpha)a_3a_2 + a_1\sin\alpha & (1-\cos\alpha)a_3^2 + \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Aus dieser Matrix kann man rückwärts Winkel und Achse ablesen:
Definition: Die Summe der Diagonalglieder einer Matrix heißt deren Spur: $\operatorname{sp} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. In der Matrix T liest man ab:

$$\operatorname{sp} T = (1-\cos\alpha)\sum_{i=1}^{2} a_i^2 + 3\cos\alpha = 1 + 2\cos\alpha \text{ wegen } |a| = 1$$

Sodann ist

$$2a_1 \sin\alpha = a_{32} - a_{23},\ 2a_2\sin\alpha = a_{13} - a_{31},\ 2a_3\sin\alpha = a_{21} - a_{12},$$

was noch einmal in Evidenz setzt, daß Orientierung der Drehachse und Vorzeichen von α sich gegenseitig bedingen. Interessiert man sich nur für die Achse, so berechnet man

$$T + T' = 2\cos\alpha\mathbf{1} + 2(1-\cos\alpha)aa' = (\operatorname{sp} T - 1)\mathbf{1} + (3 - \operatorname{sp} T)aa'$$

Die Spalten von aa' sind alle proportional zu a, und da T als orthogonale Matrix nicht die Spur 3 haben kann (außer wenn $T = \mathbf{1}$), kann man sie ablesen.

Beispiel: Die Spalten von

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden ein positiv orientiertes Orthonormalsystem. Also ist T eine Drehmatrix. Aus $\operatorname{sp} T = 0$ folgt $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, also $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ oder $\frac{4\pi}{3}$. Aus

$$3aa' = \mathbf{1} + T + T' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

findet man, daß die Drehachse von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Drehungen im R^3 lassen sich zerlegen in Drehungen um die Koordinatenachsen. Man bezeichnet

$$T_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\ T_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ und } T_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß man jede Drehung in ein Produkt $T_1(\alpha)T_2(\beta)T_3(\gamma)$ zerlegen kann. Euler bemerkte, daß man sogar mit zwei Achsen auskommt. Wir wollen das vorrechnen, wenn $T^2 \neq 1$: Wir berechnen das Produkt

$$(1)\quad T_1(\alpha)T_2(\beta)T_3(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Gegeben sei eine Drehmatrix A. Ist $a_{33} = 1$, so ist A schon selbst ein T_3. Ist $a_{33} = -1$, so ist $A^2 = 1$, und das wollten wir als Übung lassen. Wir nehmen nun $|a_{33}| < 1$. Dann wählen wir β so, daß $\cos\beta = a_{33}$, und dann ist $\sin\beta \neq 0$, und es gibt genau einen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit $\sin\alpha = \frac{a_{13}}{\sin\beta}$ und $\cos\alpha = -\frac{a_{23}}{\sin\beta}$. Jetzt stimmt schon mal der rechte Rand von A mit dem des Produktes (1) überein. Auf dieselbe Weise wählen wir γ so, daß der untere Rand stimmt. Nun müßte man nachrechnen, daß die linke obere Ecke von (1) mit der von A übereinstimmt. Stattdessen nennen wir die Matrix in (1) B und haben nach Konstruktion

$$Ae_3 = Be_3 \text{ sowie } e_3'A = e_3'B$$

Die zweite Gleichung ergibt durch Stürzen $A'e_3 = B'e_3$, also $A^{-1}e_3 = B^{-1}e_3$. Wir machen die Annahme $(*)$, daß $Ae_3 - e_3$ und $A^{-1}e_3 - e_3$ linear unabhängig sind. Es gilt

Lemma . *Für jede orthogonale Transformation T ist*

$$\textit{Kern } (T-1) = (\textit{ Bild } (T-1))^{\perp}$$

Beweis:

$x \in (\text{ Bild } (T-1))^{\perp} \Leftrightarrow (x, Ty-y) = 0$ für alle $y \Leftrightarrow 0 = (x, Ty)-(x, y) = (T^{-1}x-x, y)$ für alle $y \Leftrightarrow T^{-1}x = x \Leftrightarrow x = Tx$ ∎

Aus dem Lemma folgt, daß die Drehachse das gemeinsame Orthokomplement des zweidimensionalem Teilraumes alle $Ay - y$ ist. Gilt $(*)$, so wird dieser aufgespannt von $Ae_3 - e_3$ und $A^{-1}e_3 - e_3$. Die Drehachse ist also durch den rechten und den unteren Rand der Matrix A festgelegt. Somit haben A und B dieselbe Achse $< a >$, und

$$Ax = (1 - \cos\phi)(x, a)a + \cos\phi\ x + \sin\phi\ (a \times x) \text{ und}$$

$$Bx = (1 - \cos\psi)(x, a)a + \cos\psi\ x + \sin\psi\ (a \times x)$$

Wegen $|a_{33}| < 1$ ist $< e_3 >$ sicher nicht die Achse, also a und e_3 und damit $a, e_3, a \times e_3$ linear unabhängig. Aus $Ae_3 = Be_3$ folgt nun $\phi = \psi$ und damit $A = B$. Es ist eine leichte Übung zu sehen, daß die Einschränkung $(*)$ bedeutet, daß $A^2 \neq 1$.

Die Winkel α, β, γ heißen die Eulerschen Winkel. Die Schnittgerade der Ebene $< e_1, e_2 >$ mit ihrem Bild $< Ae_1, Ae_2 >$ heißt die Knotenlinie. Wie man an der Matrix (1) sieht, wird sie aufgespannt von $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = T_3(\alpha)e_1$. Sie bildet mit $< e_1 >$ den Winkel α und mit Ae_1 den Winkel γ .

10. Hauptachsentransformation

Der Sylvestersche Trägheitssatz beinhaltet u.a.: wenn man T erlaubt, durch die volle lineare Gruppe zu laufen, so kann man zu jeder symmetrischen Matrix A ein T finden mit

$$T'AT = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_s \end{pmatrix}$$

Die Klasse aller $T'AT$ ist durch die Signatur p, q bestimmt. Erlaubt man jedoch T nur durch eine kleinere Gruppe zu laufen, so wird man mehr Typen erhalten, weil es dann i.a. Matrizen A, B geben wird, die zwar durch ein $T \in GL(n, \mathrm{R})$ ineinander transformiert werden können ($B = T'AT$) aber nicht durch ein T der kleineren Gruppe. Wir wollen untersuchen, welche A man durch orthogonale Transformationen ineinander überführen kann.

Sei $A = A'$ gegeben. Auf der Einheitssphäre $|x| = 1$ nimmt die stetige reellwertige Funktion $f(x) = x'Ax$ ihr Maximum μ an, etwa an der Stelle u:

$$u'Au = \mu \geq x'Ax \text{ für alle } x \text{ mit } |x| = 1$$

Dann gilt $x'Ax \leq \mu x'x$ für alle $x \in \mathrm{R}^n$. Die Matrix $\mu\mathbf{1} - A$ ist also positiv semidefinit. (Eine symmetrische Matrix S heißt positiv semidefinit, wenn $x'Sx \geq 0$ für alle x).

Lemma. *Ist S positiv semidefinit und $u'Su = 0$, so ist $Su = 0$.*

Beweis: Für alle $x \in \mathrm{R}^n$ und $\lambda \in \mathrm{R}$ gilt

$$0 \leq (\lambda u + x)'S(\lambda u + x) = 2\lambda x'Su + x'Sx, \text{ weil } u'Su = 0$$

Das ist nur möglich, wenn $x'Su = 0$. Da dies für alle x gilt, folgt $Su = 0$.

Anwendung auf $S = \mu\mathbf{1} - A$ ergibt $Au = \mu u$.
Es gibt eine orthogonale Matrix K mit $Ke_1 = u$ (man spiegele zum Beispiel an $e_1 - u$, wenn $e_1 \neq u$). Dann gilt

$$AKe_1 = Au = \mu u = \mu K e_1,$$

die erste Spalte von $K^{-1}AK$ ist also $\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Wegen $K'K = \mathbf{1}$ ist nun $K^{-1} = K'$! $K'AK$ ist wieder symmetrisch, und wir haben

$$K'AK = K^{-1}AK = \begin{pmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ mit } B = B'$$

Per Induktion haben wir eine $(n-1)$-reihige orthogonale Matrix L so, daß $L'BL$ diagonal ist. Setzen wir $Q = K \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & L & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, so erhalten wir den Satz von der *Hauptachsentransformation*:

Satz 28. *Zu jeder reellen symmetrischen Matrix A gibt es eine orthogonale Matrix Q so, daß $Q'AQ$ diagonal ist.*

1. Zusatz: Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß die Diagonalelemente durch A bestimmt sind
2. Zusatz: Da $S = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ mit jeder Diagonalmatrix vertauschbar ist, kann man, indem man notfalls Q durch QS ersetzt, erreichen, daß $|Q| = 1$.

Beispiel: Zu gegebener Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ bestimme α, μ, ν mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

Es gilt $|A| = |K^{-1}AK|$ und sp A = sp $K^{-1}AK$. Daraus folgt $\mu\nu = ad - b^2$ und $\mu + \nu = a + d$. Nach Vieta sind μ und ν die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - (a+d)x + ad - b^2 = 0$$

Nachdem wir uns für eine Reihenfolge von μ, ν entschieden haben, finden wir den Einheitsvektor $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ (bis aufs Vorzeichen) aus

$$(a - \mu)\cos\alpha + b\sin\alpha = 0 \text{ falls } (a - \mu, b) \neq (0,0)$$

$$b\cos\alpha + (d - \mu)\sin\alpha = 0 \text{ falls } (b, d - \mu) \neq (0,0)$$

(Ist keine der beiden Bedingungen erfüllt, so ist A das μ-fache der Einheitsmatrix und in der Tat K beliebig).

Geometrische Deutung ($n = 2$): Durch $x'Ax = 1$ wird eine Kurve C in R^2 beschrieben. Mit x enthält sie auch $-x$, in diesem Sinne ist 0 Mittelpunkt der Kurve. Ist $x = Ky$ und $K'AK = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} =: D$, so ist $x'Ax = y'Dy$. Die Kurve $x'Ax = 1$ wird also durch K^{-1} auf die Kurve $\lambda y_1^2 + \mu y_2^2 = 1$ abgebildet:

$$K = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}; \quad x = Ky$$

Für die Kurve gibt es offenbar die Möglichkeiten

$A = 0$	leer
$\mu > 0,\ \nu = 0$	Paar paralleler Geraden
$\mu < 0,\ \nu = 0$	leer
$\mu < 0,\ \nu < 0$	leer
$\mu < 0,\ \nu > 0$	Hyperbel
$\mu > 0,\ \nu > 0$	Ellipse

Sei $x'Ax = 1$ die Gleichung einer Ellipse und p ein Punkt auf ihr: $p'Ap = 1$. Dann liegt auch $-p$ auf der Ellipse, und die (durch 0 gehende) Strecke $\overline{-p,p}$ heißt ein Durchmesser der Ellipse. Die Durchmesser $\overline{-p,p}$ und $\overline{-q.q}$ heißen konjugiert, wenn $p'Aq = 0$.

Behauptung: Wenn die Ellipse kein Kreis ist, dann gibt es genau ein Paar zueinander senkrechter konjugierter Durchmesser.

Beweis: Wenn gleichzeitig $p'q = 0$ und $p'Aq = 0$, dann ist p sowohl auf q als auch auf Aq senkrecht. Da $p \neq 0$, müssen Aq und q linear abhängig sein: $Aq = \nu q$. Genauso folgt $Ap = \mu p$. Einen nicht auf $< p >$ oder $< q >$ liegenden Vektor r, für den Ar proportional zu r ist, kann es nicht geben: Da p und q linear unabhängig sind, wäre $r = \alpha p + \beta q$, woraus $Ar = \alpha\mu p + \beta\nu q$, und dies ist proportional zu r nur, wenn $\alpha\beta(\mu - \nu) = 0$, also α oder $\beta = 0$, weil sonst $\mu = \nu$ und $A = \mu\mathbf{1}$ und die Ellipse ein Kreis wäre.

Definition: Die zueinander senkrechten konjugierten Durchmesser heißen die Hauptachsen der Ellipse.

Zu Beginn waren wir auf $Au = \mu u$ gestoßen, nachdem wir für μ das Maximum der Werte $x'Ax$ für $|x| = 1$ genommen hatten. Genauso hätten wir für das Minimum ν der Werte $x'Ax$ auf $|x| = 1$ einen Vektor v mit $Av = \nu v$ gefunden. Es folgt: Die Hauptachsen sind der kürzeste und der längste Durchmesser der Ellipse.

"Hauptachsentransformation" bedeutet: die Ellipse wird so gedreht, daß ihre Hauptachsen auf die Koordinatenachsen fallen.

Zusatz: Die Tangente im Punkte p hat die Gleichung $x'Ap = 1$, denn diese Gerade trifft die Ellipse nur in p:

$$1 = x'Ax = x'Ap = p'Ap \Rightarrow x - p \perp Ax \text{ und } Ap \Rightarrow < x > = < p >$$

Wegen der Gleichung $x'Ap = 1$ kann nun nur noch $x = p$ sein.

Nun hat also einerseits die Tangente in p die Gleichung $x'Ap = 1$. Anderseits ist durch $q'Ap = 0$ der konjugierte Durchmesser (als Verbindungsstrecke von q und $-q$) definiert. Es folgt: Der konjugierte Durchmesser ist parallel zur Tangente in p:

11. Eigenwerte

Bis jetzt waren die Koeffizienten der Gleichungssysteme, Matrizen usw. kommentarlos reelle Zahlen. Nun kommen Fragen, bei denen die Antwort sehr wohl davon abhängt, aus welchem Bereich wir die Koeffizienten nehmen.
Bis jetzt: Ob ein lineares Gleichungssystem lösbar ist und wenn ja die Dimension des Lösungsraumes hing nur vom Rang der beteiligten Matrizen ab, und dieser ließ sich mit dem Gaußschen Algorithmus feststellen, bei dem nur die 4 Grundrechnungsarten benutzt werden. Das hat zur Folge:

Ein lineares Gleichungssystem mit rationalen Koeffizienten, welches eine (keine, unendlich viele) reelle Lösungen besitzt, hat auch eine (keine, unendlich viele) rationale Lösungen.

Jetzt kommen Probleme anderer Art: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ hat rationale Koeffizienten, aber die Frage, ob es einen Vektor x gibt, für den Ax proportional zu x ist, hat die Antwort
NEIN, wenn wir x mit rationalen Koeffizienten suchen, und
JA, wenn wir x mit reellen Koeffizienten suchen.
Deshalb werden wir im zweiten Teil dieser Vorlesung spezifizieren, mit welchem Koeffizientenbereich wir arbeiten. Zur Präzision einige Defintionen:

Definiton: Eine additive Gruppe mit distributiver Multiplikation heißt Ring.

Ein Ring heißt assoziativ, wenn die Multiplikation die Regel $(ab)c = a(bc)$ erfüllt. Da wir in dieser Vorlesung nur assoziative Ringe betrachten, sagen wir einfach "Ring" statt "assoziativer Ring". Beispiele:

1. Die ganzen Zahlen bilden einen Ring, er heißt $\mathbb{Z}$. Die geraden Zahlen bilden einen Teilring, nicht hingegen die ungeraden. $\mathbb{Z}$ ist kommutativ ($ab = ba$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$) und besitzt ein Einselement: $1 \cdot n = n$ für alle n.
2. Die n-reihigen Matrizen mit reellen Koeffizienten bilden einen Ring. Dieser wird mit $M_n(\mathbb{R})$ bezeichnet. Er besitzt ein Einelement, nämlich die Einheitsmatrix. Für $n \geq 2$ ist er nicht kommutativ. Allgemeiner: Ist R irgendein Ring, so bilden die n-reihigen Matrizen mit Koeffizienten aus R ebenfalls einen Ring, er heißt $M_n(R)$.

Definition: Ein kommutativer Ring mit Einselement , in dem jedes von 0 verschiedene Element ein Inverses (bezüglich der Multiplikation) besitzt, heißt Körper. Beispiele:

1. Die rationalen Zahlen bilden einen Körper, nicht jedoch die ganzen Zahlen.
2. Die reellen Zahlen bilden einen Körper. Mit ihm haben wir die ganze Zeit gearbeitet, ohne ein Wort zu verlieren. Seine Existenz glauben wir aus der Analysis-Vorlesung.
3. Die reellen Zahlen der Gestalt $x + y\sqrt{2}$ mit rationalen x und y bilden einen Teilkörper von $\mathbb{R}$: Daß sie einen Ring bilden, ist offensichtlich, aber das Inverse gehört auch dazu: ist nämlich $z = x + y\sqrt{2} \neq 0$, so sind x und y nicht beide 0 und deshalb $x^2 - 2y^2 \neq 0$ (denn 2 ist nicht Quadrat in $\mathbb{Q}$, vgl. Kap 3, Seite 3). $\frac{x}{x^2-2y^2} - \frac{y}{x^2-2y^2}\sqrt{2}$ ist invers zu z.
4. Sei
$$C = \{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$
   a) $C + C \subset C$: C ist eine additive Untergruppe von $M_2(\mathbb{R})$
   b) $C \cdot C \subset C$: also ist C ein Unterring von $M_2(\mathbb{R})$
   c) Für $A, B \in C$ ist $AB = BA$. C ist ein kommutativer Ring
   d) Wenn $A \in C$ und $A \neq 0$, so ist $|A| = a^2 + b^2 \neq 0$, also A invertierbar, und a^{-1} gehört auch zu C

Nach a)-d) ist C ein Körper. Als Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist er zweidimensional, er wird von $\mathbf{1}$ und $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt. Die Vielfachen von $\mathbf{1}$ bilden einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Teilkörper von C, und $I^2 = -\mathbf{1}$. Ergebnis und übliche Bezeichnung:
Es gibt einen Körper, der $\mathbb{R}$ enthält und als Vektorraum über $\mathbb{R}$ die Dimension 2 hat und eine Quadratwurzel aus -1 enthält. Seine Struktur ist durch diese Angaben offensichtlich festgelegt. Er heißt der Körper der komplexen Zahlen und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Die beiden Wurzeln aus -1 bezeichnet man mit i und $-i$.

Sie kennen $\mathbb{R}$ aus der Analysis als geordneten Körper, der bezüglich des Betrages

$$|x| = \max(x, -x)$$

vollständig ist und in dem $\mathbb{Q}$ dicht liegt. Benutzt man dies und die obige Definition von $\mathbb{C}$, so kann man beweisen: Jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten zerfällt in Linearfaktoren:

$$f(x) = c \cdot (x - a_1)....(x - a_n)$$

Ab jetzt betrachten wir also nicht mehr nur reelle Vektorräume, sondern Vektorräume über irgendeinem Körper K. Die Sätze, die dann gelten werden (oder nicht), hängen von K ab. Die Sätze über lineare Gleichungen, lineare Unabhängigkeit, Rang, Basis usw. jedoch gelten wie eingangs bemerkt über jedem Körper K, eben weil zu ihrem Beweis nur die vier Grundrechnungsarten benutzt wurden.
Sei V ein Vektorraum über dem Körper K und ϕ ein Endomorphismus von K.

Definition: Ist $\lambda \in K$ und $v \in V$ und $v \neq 0$ und $\phi v = \lambda v$, so heißt λ ein Eigenwert von ϕ und v ein zu λ gehöriger Eigenvektor von ϕ.

Beispiele:

1. Für $\phi = \alpha \cdot id$ ist α der einzige Eigenwert von ϕ und jeder von 0 verschiedene Vektor Eigenvektor.
2. ϕ sei eine Scherung: $\phi x = x + f(x)t$ mit $f(t) = 0$, $t \neq 0$. Für $x \neq 0$ schließt man

$$\phi x = \lambda x \Leftrightarrow f(x)t = (\lambda - 1)x \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ und } f(x) = 0$$

   Dies zeigt: 1 ist einziger Eigenwert, und die zugehörigen Eigenvektoren sind genau die von 0 verschiedenen Vektoren in der Hyperebene $f(x) = 0$.
3. $V = \mathbb{R}^2$ und $\phi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} x$. λ ist Eigenwert, wenn das System

$$\begin{array}{rcrcl} (\cos\alpha - \lambda)x_1 & - & \sin\alpha x_2 & = & 0 \\ \sin\alpha x_1 & + & (\cos\alpha - \lambda)x_2 & = & 0 \end{array}$$

   nicht trivial lösbar ist. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante des Systems 0 ist. Diese ist

$$\lambda^2 - 2\cos\alpha\lambda + 1 = 0 \text{ oder } (\lambda - \cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha - 1$$

   Ist $\cos\alpha \neq \pm 1$, so ist die Antwort

Wenn $K = \mathbb{R}$ ist, so gibt es keinen Eigenwert und keinen Eigenvektor (entsprechend der Anschauung, daß bei Drehung um einen Winkel $\notin \mathbb{Z}\pi$ keine Gerade (als Ganzes) festbleibt
Wenn $K = \mathbb{C}$, so haben wir die Eigenwerte $e^{i\alpha}$ und $e^{-i\alpha}$.

4. $K = \mathbb{R}$ und V der Vektorraum aller reellwertigen unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf der reellen Achse mit $f(0) = f(\pi) = 0$ und $\phi(f) = f''$. V ist zwar unendlich-dimensional, aber wir fragen trotzdem mal nach den $\lambda \in \mathbb{R}$ und $0 \neq v \in V$ mit $\phi(v) = \lambda v$.

a) 0 ist kein Eigenwert; denn die Funktionen mit $f'' = 0$ sind die Polynome höchstens ersten Grades, und diese sind 0, wenn sie an 2 Stellen 0 sind.

b) $\lambda > 0$, also etwa ω^2 mit reellem ω. $u(x) = e^{\omega x}$ und $v(x) = e^{-\omega x}$ erfüllen $u'' = \lambda u$ und $v'' = \lambda v$. Wenn auch noch $g'' = \lambda g$, so ist

$$\begin{array}{ccll} (gu' - g'u)' = 0, & \text{also} & gu' - g'u = c & \text{konstant.} \\ \text{Genauso} & & gv' - g'v = d & \text{konstant.} \\ \text{Da } vu' - uv' = 2\omega: & & g = \frac{1}{2\omega}(cv - du) & \end{array}$$

   Jede Lösung von $g'' = \lambda g$ hat also die Gestalt

$$g(x) = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x} \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Die Randbedingungen erheischen

$$\alpha+\beta=0 \text{ und } \alpha e^{\omega\pi}+\beta e^{-\omega\pi}=0$$

Sind α und β nicht beide (also beide nicht) 0, so folgt $e^{2\omega\pi}=0$. Dies hat aber keine reelle Lösung. Also gibt es keine positiven Eigenwerte.

c) $\lambda<0$, also $\lambda=-\omega^2$ mit reellem ω. $y''=-\omega^2 y$ wird gelöst durch $u(x)=\cos\omega x$ und $v(x)=\sin\omega x$. Dieselbe Rechnung wie oben zeigt, daß jede Lösung g die Gestalt $g(x)=\alpha u(x)+\beta v(x)$ hat. Die Randbedingungen erzwingen $\alpha=0$ und $\beta\sin\omega\pi=0$. Damit $g\neq 0$ ist, muß $\omega\in\mathbb{Z}$ sein: $\omega=\pm1,\pm2,\ldots.$. Die Eigenwerte des Problems sind also

$$-1,-4,-9,\ldots.,-n^2,\ldots..$$

Übersetzung in Matrizensprache: Sei A eine Matrix mit Koeffizienten in dem Körper K.

Definition: $\lambda\in K$ heißt Eigenwert und $x\in K^n$ Eigenvektor zu λ, wenn

$$Ax=\lambda x \text{ und } x\neq 0$$

Frage: Wie findet man Eigenwerte? Nach Definition ist

$$\lambda \text{ Eigenwert von } A \Longleftrightarrow \text{ Kern } (A-\lambda\cdot\mathbf{1})\neq 0$$

Nach Kap 5 und 7 ist dies gleichbedeutend mit

$$|A-\lambda\mathbf{1}|=0$$

Diese Determinante ist ein Polynom n-ten Grades in λ. Um es zu normieren, definiert man

Definition : Das Polynom

$$\chi_A(x):=|x\mathbf{1}-A|$$

heißt das charakteristische Polynom von A. Man findet

$$\chi_A(x)=x^n-\text{ sp } Ax^{n-1}+\ldots..+(-1)^n|A|$$

$n=2$:

$$\chi_A(x)=|x\mathbf{1}-A|=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & x-a_{22}\end{vmatrix}=x^2-(a_{11}+a_{22})x+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$$

$n=3$

$$\chi_A(x)=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33}\end{vmatrix}=x^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})x^2+(|A_{11}|+|A_{22}|+|A_{33}|)x-|A|$$

Da ein Polynom n-ten Grades höchstens n verschiedene Nullstellen hat, besitzt ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Raumes höchstens n Eigenwerte. Dies könnte man auch aus folgendem Satz schließen:

Satz 29. *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K und ϕ ein Endomorphismus von V und $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in K$ paarweise verschiedene Eigenwerte von ϕ. Sind $u_1,\ldots,u_m$ Eigenvektoren zu $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, so sind $u_1,\ldots,u_m$ linear unabhängig.*

Beweis: Angenommen, es gibt eine nicht triviale lineare Relation zwischen den u_i. Dann nehmen wir eine möglichst kurze solche und numerieren so, daß sie

$$(I)\qquad \lambda_1u_1+\ldots.+\lambda_ku_k=0$$

heißt. Hierin sind alle $\lambda_i\neq 0$ und $k\geq 2$. Anwenden von ϕ ergibt

$$(II)\qquad \lambda_1\alpha_1u_1+\ldots.+\lambda_k\alpha_ku_k=0$$

$(II)-\alpha_k(I)$ ergibt

$$\lambda_1(\alpha_1-\alpha_k)u_1+\ldots.+\lambda_{k-1}(\alpha_{k-1}-\alpha_k)u_{k-1}=0$$

Nach Voraussetzung sind in dieser Relation alle Koeffizienten $\neq 0$, und sie ist kürzer als (I), Widerspruch.

Eine unmittelbare Folgerung ist

Satz 30. *Besitzt ein Endomorphimus eines n-dimensionalen Vektorraumes n verschiedene Eigenwerte, so bilden zugehörige Eigenvektoren eine Basis des Raumes.*

Ist V ein Vektorraum über dem Körper K, so kann die Existenz von "genügend vielen" (im besten Falle einer Basis von) Eigenvektoren an zwei Hindernissen scheitern:

1. Die Eigenwerte sind in K nicht vorhanden, weil K zu klein. Das kann man beheben, indem man K vergrößert.
2. Es fallen Eigenwerte zusammen (d.h. das charakteristische Polynom hat mehrfache Nullstellen), und zu einem solchen Eigenwert gibt es nicht so viele linear unabhängige Eigenvektoren wie seine Vielfachheit im charakteristischen Polynom beträgt. Das kann man nicht beheben, es liegt in der Natur des Endomorphismus und bleibt so bei jeder Erweiterung von K. Zum Beispiel ist für eine Scherung 1 der einzige Eigenwert; es gibt dazu aber, falls sie nicht die Identität ist, nur $n-1$ linear unabhängige Eigenvektoren.

Deshalb wollen wir die beiden jetzt zu definierenden Begriffe "diagonalisierbar" und "halbeinfach" unterscheiden:

Definiton: Ein Endomorphismus von V heißt diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren für ϕ besitzt.
In Matrizensprache: Eine Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix T gibt, so daß $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. In diesem Falle sind die Diagonalglieder gerade die Eigenwerte von A.
Unsere erste Erkenntnis war also: Ein Endomorphismus von V, dessen charakteristisches Polynom $n = \dim V$ verschiedene Nullstellen besitzt, ist diagonalisierbar. Scherungen $\neq 1$ sind nicht diagonalisierbar. Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation ist jede reelle symmetrische Matrix diagonalisierbar.

Für die zweite Definition brauchen wir eine Vorbereitung:
Definition: Der Vektorraum V heißt die direkte Summe der Unterräume U und W, in Zeichen

$$V = U \oplus W$$

wenn $V = U + W$ und $U \cap W = 0$.
Das bedeutet, daß jeder Vektor v aus V genau eine Darstellung $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ besitzt.

Definition: Ein Endomorphismus ϕ von V heißt halbeinfach, wenn es zu jedem ϕ-invarianten Unterraum U einen $\underline{\phi - invarianten}$ Unterraum W gibt mit $V = U \oplus W$.

Beispiele:

1. Scherungen $\phi x = x + f(x)t$ (mit f unf $t \neq 0$) sind nicht halbeinfach; denn zu Kern f gibt es keinen ϕ-invarianten direkten Summanden.
2. Orthogonale Transformationen des (euklidischen) $\mathbb{R}^n$ sind immer halbeinfach; denn mit U ist $U^\perp$ invariant, und $V = U \oplus U^\perp$.

In Matrizensprache: A ist halbeinfach, falls Folgendes gilt: Wenn immer für irgendeine invertierbare Matrix P die Matrix $P^{-1}AP$ die Gestalt $\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix}$ hat, dann gibt es auch eine invertierbare Matrix Q, so daß $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Satz 31. *Wenn $K = \mathbb{C}$, dann bedeutet halbeinfach dasselbe wie diagonalisierbar*

Beweis: " $\Rightarrow$ " : Da $K = \mathbb{C}$, gibt es einen Eigenwert λ. Sei v ein Eigenvektor zu λ. Zu dem invarianten Teilraum $< v >$ gibt es einen invarianten direkten Summanden: $V =< v > \oplus W$. Fahre fort mit W und der Einschränkung von ϕ auf W.
Für die Richtung " $\Leftarrow$ " brauchen wir ein

Lemma 1. *Sind* $\lambda_1,...,\lambda_k$ *verschieden, so ist die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & .... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & .... & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & .... & \lambda_k^2 \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & .... & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

invertierbar.

Beweis: Wir zeigen, daß ihre Determinante nicht 0 ist. Dazu subtrahieren wir das λ_1 -fache der vorletzten Zeile von der letzten, dann das λ_1 -fache der $(k-2)$ -ten von der $(k-1)$ -ten usw.. schließlich das λ_1 -fache der ersten von der zweiten Zeile. Dadurch entsteht eine Matrix, deren erste Spalte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Diese Spalte subtrahieren wir von allen anderen. In der nun entstehenden Matrix klammern wir in der zweiten Spalte $\lambda_2 - \lambda_1$, in der dritten Spalte $\lambda_3 - \lambda_1$ usw., in der letzten Spalte $\lambda_k - \lambda_1$ aus. Wir erhalten

$$|A| = (\lambda_2 - \lambda_1)...(\lambda_k - \lambda_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & .... & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & \lambda_2^{k-2} & .... & \lambda_k^{k-2} \end{vmatrix}$$

Mit Induktion folgt

$$|A| = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)$$

$|A|$ ist die sog. Vandermondesche Determinante von $\lambda_1, ...\lambda_k$. Sind diese Zahlen paarweise verschieden, so ist sie nicht 0. Nun können wir die Richtung " $\Leftarrow$ " des Satzes beweisen: Sei U ein invarianter Unterraum. Nach Voraussetzung besitzt V eine Basis $v_1, ..., v_n$ aus Eigenvektoren. Seien $\lambda_1, ..., \lambda_k$ mit $(k \leq n)$ die verschiedenen Eigenwerte von ϕ . Zu jedem Eigenwert λ_j nennen wir V_j den Unterraum, der von denjenigen der Basisvektoren aufgespannt wird, die zum Eigenwert λ_j gehören. Dann ist $\phi x = \lambda_j x$ für alle $x \in V_j$ und $V = \oplus_j V_j$. Wir beweisen jetzt, daß

$$U = \oplus_j (U \cap V_j)$$

m.a.W. daß für einen Vektor $u \in U$ auch alle seine Komponenten in den V_i zu U gehören. Beweis: Sei $u \in U$. Jedenfalls läßt sich u als Vektor von V zerlegen:

$$\begin{array}{rrcll} & u & = & \sum_i x_i & \text{mit } x_i \in V_i \\ \phi \text{ darauf angewendet}: & \phi u & = & \sum_i \lambda_i x_i & \\ \vdots & & & & \\ \phi\ k\text{-mal angewendet}: & \phi^k u & = & \sum_i \lambda_i^k x_i & \end{array}$$

Nach dem Lemma über die Vandermonde-Determinante gibt es Zahlen c_{ij} mit

$$\sum_{l=1}^{k} c_{il} \lambda_j^{l-1} = \delta_{ij} \text{ für } 1 \leq i, j \leq k$$

Nun folgt

$$\sum_l c_{jl} \phi^{l-1} u = \sum_l c_{jl} \sum_i \lambda_i^{l-1} x_i = \sum_i (\sum_l c_{jl} \lambda_i^{l-1}) x_i = \sum_i \delta_{ij} x_i = x_j$$

Da $u \in U$ und U ϕ-invariant, gehört der erste Ausdruck zu U und damit auch x_j , wie behauptet. Nun ist es leicht, den Beweis des Satzes zu vollenden: In jedem V_i wähle (einfach nach dem Basisergänzungssatz) irgendeinen Unterraum W_i mit $V_i = (U \cap V_i) \oplus W_i$. Da ϕ in V_i nur die Multplikation mit λ_i bewirkt, ist W_i automatisch ϕ-invariant und damit auch $W = \oplus_i W_i$, und $V = U \oplus W$.

12. Polynome und der Satz von Cayley-Hamilton

Der Matrizenring $M_n(K)$ hat als Vektorraum über dem Körper K betrachtet die Dimension n^2. Deshalb sind je n^2+1 Matrizen linear abhängig. Insbesondere sind

$$\mathbf{1}, A, A^2, A^3, ..., A^{n^2} \text{ linear abhängig}$$

für jede Matrix A. Anders ausgedrückt: Zu jeder Matrix A gibt es ein Polynom f vom Grade $\leq n^2$ mit $f(A)=0$. In Wirklichkeit gilt viel mehr:

Satz 32. *(Cayley-Hamilton) Jede Matrix ist "Nullstelle" ihres charakteristischen Polynoms:*

$$\chi_A(A) = 0$$

Beweis: Wir wollen uns angewöhnen, die Unbestimmte in den Polynomen mit X zu bezeichnen. Sei $C = X \cdot \mathbf{1} - A$ und $\tilde{C}$ die Adjunkte von C mit den Koeffizienten $\tilde{c}_{rs}$. Diese sind Polynome in X: $\tilde{c}_{rs} = \tilde{c}_{rs}(X)$. Wir sortieren nach Potenzen von X:

$$\tilde{C} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i\, X^i \text{ mit } C_i \in M_n(K)$$

Nun folgt

$$\chi_A(X) = |X\mathbf{1} - A| = \tilde{C} \cdot C = \sum_{i=0}^{n-1} C_i X^i \cdot (X\mathbf{1} - A)$$

$$= C_{n-1}X^n + \sum_{i=1}^{n-1}(C_{i-1} - C_iA)\; X^i - C_0A$$

Dies ist eine Polynomidentität (in X). Beide Seiten stimmen also koeffizientenweise überein. D.h. wenn

$$\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0,$$

dann gilt

$$C_{n-1} = \mathbf{1},\;\; C_{i-1} - C_iA = a_i \cdot \mathbf{1} \text{ für } i = 1,...,n-1 \text{ und } -C_0A = a_0 \cdot \mathbf{1}$$

Daraus folgt

$$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1A + a_0\mathbf{1} =$$

$$A^n + (C_{n-1} - A)A^{n-1} + (C_{n-2} - C_{n-1}A)A^{n-2} + ... + (C_0 - C_1A)A - C_0A = 0$$

Es kann sein, daß es Polynome f noch kleineren Grades gibt mit $f(A)=0$; z.B. für $A = \alpha\mathbf{1}$ ist $f(A) = 0$ für das Polynom $f(X) = X - \alpha$. Unter allen Graden von Polynomen $f \neq 0$ mit $f(A) = 0$ sei k der kleinste. (Nach Satz 32 ist $k \leq n$). Angenommen, f und g haben beide Grad k, und $f(A) = g(A) = 0$. Sind a und b die höchsten Koeffizienten von f und g, so ist $h = bf - ag$ ein Polynom der Gestalt $c_{k-1}X^{k-1} + ... + c_1X + c_0$ mit $h(A) = 0$. Da es kein Polynom $< k$-ten Grades mit Nullstelle A gibt, ist $h = 0$, also $bf = ag$. Daher gibt es nur *ein* normiertes (i.e. mit höchstem Koeffizienten 1) Polynom f kleinsten Grades mit $f(A) = 0$

Definition: Das normierte Polynom f kleinsten Grades mit $f(A) = 0$ heißt das Minimalpolynom von A. Bezeichnung: $m_A(X)$.

Beispiele:

1. $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ mit $\alpha \neq \beta$. Für $f(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$ gilt $f(A) = 0$. Da A kein Vilelfaches der $\mathbf{1}$ ist, gibt es kein Polynom ersten Grades mit $g(A) = 0$. Also ist f das Minimalpolynom von A.
2. $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Mit derselben Begründung wie in 1. findet man $m_A(X) = (X-\alpha)^2$

3. $A = \alpha\mathbf{1}$. Offenbar ist $m_A(X) = X - \alpha$.

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ A bewirkt eine zyklische Vertauschung der Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$. Daher ist $A^3 = \mathbf{1}$. Anderseits sind $\mathbf{1}$, A und A^2 linear unabhängig, da an jeder Stelle i,j genau eine dieser drei Matrizen eine 1 hat und die andern Nullen. Daher hat das Minmalpolynom mindestens den Grad 3 und ist also $= X^3 - 1$.

Um die Tatsache auszunutzen, daß jede Matrix (jeder Endomorphismus) eine Polynomgleichung erfült, brauchen wir etwas Polynomkalkül. Im Polynomring kann man, wie im Ring der ganzen Zahlen, mit Rest teilen:

Division mit Rest: Zu je zwei Polynomen $f, g \neq 0$ gibt es Polynome q und r mit

$$f(X) = q(X)g(X) + r(X) \text{ und } r(X) = 0 \text{ oder grad } r < \text{ grad } g$$

Bemerkung: Das Nullpolynom hat keinen Grad. Bei manchen Überlegungen weist man ihm den Grad unendlich zu; denn es ist ja durch jedes Polynom teilbar, sein "Grad" müßte demnach größer sein als alle andern Grade. Aber bei unseren Überlegungen hat das keinen Sinn.

Folgerung aus der Division mit Rest: Jedes Polynom F mit $F(A) = 0$ ist durch das Minimalpolynom von A teilbar. Insbesondere ist das Minimalpolynom ein Teiler des charakteristischen Polynoms. Nämlich: Scheibe $F = qm_A + r$ mit $r = 0$ oder grad $r <$ grad m_A. Aus $F(A) = 0$ und $m_A(A) = 0$ folgt $r(A) = 0$. Wegen der Minimaleigenschaft von grad m_A kann der zweite Fall nicht eintreten, also ist $r = 0$.

Euklidischer Algorithmus: Dies ist die iterierte Division mit Rest. Da die Grade der Reste bei jedem Schritt abnehmen, geht nach spätestens grad g Schritten die Division auf. Die Nummer k bezeichne die Stelle, für die die Reste $r_0, r_1, ..., r_k$ noch alle ungleich 0 sind, aber die Division durch r_k geht auf. Dann sieht das Schema so aus:

$$\begin{array}{ccccll} f & = & q_0 g & + & r_0 & \text{mit grad } r_0 < \text{grad } g \\ g & = & q_1 r_0 & + & r_1 & \text{mit grad } r_1 < \text{grad } r_0 \\ r_0 & = & q_2 r_1 & + & r_2 & \text{mit grad } r_2 < \text{grad } r_1 \\ & & \vdots & & & \\ r_{k-2} & = & q_k r_{k-1} & + & r_k & \\ r_{k-1} & = & q_{k+1} r_k & & & \end{array}$$

a) Offensichtlich ist r_k Teiler von r_{k-1}, nach der vorletzten Zeile also auch von r_{k-2}, usw. Scließlich

$$r_k \text{ ist Teiler von } f \text{ und } g$$

b)

$$\begin{pmatrix} r_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{k-1} \\ r_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{k-2} \\ r_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$(I) \qquad = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k+1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

Definiert man A_i rekursiv durch

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix} \text{ und } A_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{i+1} \end{pmatrix} A_i$$

so folgt aus dem Bildungsgesetz, daß die erste Zeile von A_{i+1} gleich der zweiten Zeile von A_i ist und

$$A_{i+1} = \begin{pmatrix} c_i & d_i \\ c_{i+1} & d_{i+1} \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{array}{ccccc} c_{i+1} & = & c_{i-1} & - & q_{i+1} c_i \\ d_{i+1} & = & d_{i-1} & - & q_{i+1} d_i \end{array} \quad \text{für } i \geq 1$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -q_0 \\ -q_1 & 1+q_0q_1 \end{pmatrix}$$

Schema:

$$\begin{array}{cccccccc} & & -q_0 & -q_1 & -q_2 & \ldots\ldots & -q_k & -q_{k+1} \\ 1 & 0 & c_0 = 1 & c_1 = -q_1 & & \ldots\ldots & c_k & c_{k+1} \\ 0 & 1 & d_0 = -q_0 & d_1 = 1 + q_0q_1 & & \ldots\ldots & d_k & d_{k+1} \end{array}$$

Aus (I) folgt

$$r_k = c_k f + d_k g \quad \text{und} \quad 0 = c_{k+1} f + d_{k+1} g$$

Die letzte Spalte des Schemas ist also prportional zu $\begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix}$.

Beispiel mit ganzen Zahlen statt Polynomen: $f = 156$ und $g = 28$

$$\begin{array}{rcccc} 156 & = & 5 \cdot 28 & + & 16 \\ 28 & = & 1 \cdot 16 & + & 12 \\ 16 & = & 1 \cdot 12 & + & 4 \\ 12 & = & 3 \cdot 4 & & \end{array}, \qquad \begin{array}{lcccccc} & & & -5 & -1 & -1 & -3 \\ \text{Schema}: & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -7 \\ & 0 & 1 & -5 & 6 & -11 & 39 \end{array}$$

$$4 = 2 \cdot 156 - 11 \cdot 28 \text{ und } (39, 7) \text{ ist proportional zu } (f, g)$$

Wir haben bewiesen

Satz 33. *Zu je zwei Polynomen $f, g \neq 0$ gibt es ein Polynom d (nämlich das r_k aus dem Algorithmus) mit*
(a) d ist ein gemeinsamer Teiler von f und g
(b) d besitzt eine Darstellung $d = uf + vg$ mit geeigneten Polynomen u, v.

Folgerungen:
1. Jeder gemeinsame Teiler von f und g geht in d auf. Beweis: (b). Deshalb nennt man d größten gemeinsamen Teiler von f und g.
2. Jedes Polynom mit (a) und (b) unterscheidet sich von d nur um einen konstanten Faktor. Beweis: Wenn auch noch h die Eigenschaften (a) und (b) hat, dann ist d Teilern von h (wegen (a) für d und (b) für h). Umgekehrt ist auch h Teiler von d. Gradvergleich zeigt $h =$ Konstante mal d.

Der größte gemeinsame Teiler von zwei Polynomen ist also bis auf einen konstanten Faktor $\neq 0$ bestimmt. Normiert man ihn, so ist er festgelegt. Aber das ist gar nicht wichtig, weil es bei Teilbarkeitsfragen auf von 0 verschiedene Konstanten nicht ankommt.
Ist K ein Körper, so bilden die Polynome (in einer Unbestimmten X) mit Koeffizienten aus K einen Ring, dieser wird mit $K[X]$ bezeichnet.
Wichtig ist: Der ggT von zwei Polynomen aus $K[X]$ läßt sich durch den oben beschriebenen Algorithmus *innerhalb von* $K[X]$ ermitteln Der ggT von zwei Polynomen aus $\mathbb{Q}[X]$ wird innerhalb $\mathbb{Q}[X]$ gefunden und ist immer noch ggT, auch wenn man die Polynome in $\mathbb{R}[X]$ oder $\mathbb{C}[X]$ betrachtet (wo sie ja auch liegen). Speziell:

Definition: Zwei Polnome heißen teilerfremd, wenn sie keinen gemeinsamen Teiler vom Grade ≥ 1 besitzen.

Nach Satz 33 folgt der für uns wichtige Spezialfall:

Aus teilerfremden Polynomen kann man die 1 kombinieren

Zwei teilerfremde Polynome aus $K[X]$ bleiben teilerfremd in jedem Oberkörper von K.

Beispiele:
1. Ist $\alpha \neq \beta$, so sind $X - \alpha$ und $X - \beta$ teilerfremd, nämlich
$$\frac{1}{\beta - \alpha}(X - \alpha) + \frac{1}{\alpha - \beta}(X - \beta) = 1$$
2. $X - 1$ und $X^2 + 1$ sind teilerfremd, nämlich
$$\frac{1}{2}(X^2 + 1) - \frac{1}{2}(X + 1)(X - 1) = 1$$

Wozu machen wir das? Um gewisse lineare Probleme zu lösen, ist es nötig, den Raum zu zerlegen und dadurch das Problem zu "verkleinern". Genauer: Sei V ein Vektorraum über dem Körper K und ϕ ein Endomorphismus von V und F ein Polynom mit $F(\phi) = 0$, z.B. das charakteristische Polynom von ϕ. Angenommen nun, F sei in zwei teilerfremde Polynome f und g zerlegt: $F = f \cdot g$. Dann läßt sich aus f und g die 1 kombinieren:

$$1 = uf + vg \text{ mit passenden Polynomen } u \text{ und } v$$

Man setzt in diese Polynomidentität ϕ ein:

$$id = u(\phi)f(\phi) + v(\phi)g(\phi)$$

und wendet beide Seiten auf einen beliebigen Vektor $x \in V$ an:

(1) $$x = u(\phi)f(\phi)x + v(\phi)g(\phi)x$$

Der linke Summand wird wegen $fg = F$ und $F(\phi) = 0$ von $g(\phi)$ annulliert, der rechte von $f(\phi)$. Setzt man also

$$V_f = \{x \in V \mid f(\phi)x = 0\} \text{ und } V_g = \{x \in V \mid g(\phi)x = 0\},$$

so zeigt (1), daß $V = V_f + V_g$ und $V_f \cap V_g = 0$, also mit der Definition aus Kap.11

$$V = V_f \oplus V_g$$

Anwendungen:

1. Die sog. Kaninchenzahlen oder Fibonacci-Zahlen sind definiert durch

   (1) $$a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$

   In einem vereinfachten Modell beschreiben sie die Vermehrung von Kaninchen. Man möchte statt der Rekursion (1) einen geschlossenen Ausdruck für a_n, zum Beispiel um die Größenordung des Wachstums abzuschätzen. Wir nehmen $K = \mathbb{R}$, $V =$ Vektorraum aller Folgen $x_0, x_1, x_2, ...$ mit $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ für $n \geq 2$ und als Endomorphismus ϕ die Verschiebung $(\phi x)_n = x_{n+1}$ für alle n. Nach Definition von V ist $\phi^2 = \phi + id$, d.h. $F(\phi) = 0$ für $F(X) = X^2 - X - 1 = (X - \alpha)(X - \beta)$ mit den Nullstellen $\alpha, \beta = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Es folgt

   (1) $$V = V_\alpha \oplus V_\beta \text{ mit } V_\alpha = \{x \in V \mid \phi x = \alpha x\}, \ V_\beta \text{ analog}.$$

   Was bedeutet nun $x = (x_0, x_1, x_2, ...) \in V_\alpha$? Es bedeutet, daß für alle n

   $$x_n = \alpha x_{n-1} = \alpha^2 x_{n-2} = ... = \alpha^n x_0$$

   Die Zerlegung (1) bedeutet: Jede Folge $(x_n)_n$, die der Rekursion $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ für alle $n \geq 2$ genügt, hat die Gestalt

   $$x_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n \text{ mit Konstanten } \lambda, \mu$$

   Die Konstanten sind durch die Anfangswerte x_0 und x_1 bestimmt. Speziell für die Fibonacci-Zahlen erhält man nach deren Bestimmung

   $$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$$

2. $K = \mathbb{C}$ und $V =$ Vektorraum aller unendlich oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen $y(x)$ einer reellen Variablen x, die die Differentialgleichung

   $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

   erfüllen. Dabei sind die a_i gegebene Konstanten: $a_i \in \mathbb{C}$. Hier betrachtet man $\phi = D =$ Ableitung nach x: $D(y) = y'$. Für das Polynom $F(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ gilt $F(D)y = 0$ für alle $y \in V$. In $\mathbb{C}[X]$ zerfällt F in Linearfaktoren, nur schade, daß diese auch mehrfach auftreten können:

   $$F(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)^{k_i}, \ \alpha_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{r} k_i = n$$

   Statt wie oben in zwei kann man schrittweise in die den teilerfremden Faktoren entsprechenden Summanden zerlegen:

   $$V = \oplus_{i=1}^{r} V_i \text{ mit } V_i = \{y \in V \mid (D - \alpha_i)^{k_i} y = 0\}$$

   Die Differentialgleichung für die Funktionen aus V_i läßt sich nun ganz einfach lösen mit Hilfe von

Lemma 1.

$$(D-\alpha)^k y = e^{\alpha x} D^k (e^{-\alpha x} y)$$

Beweis: Für $k=0$ ist das klar. Sei $k>0$ und die Formel bis $k-1$ bewiesen. Dann ist

$$e^{\alpha x} D^k(e^{-\alpha x}y) = e^{\alpha x} D^{k-1}(e^{-\alpha x}y' - \alpha e^{-\alpha x}y) = e^{\alpha x} D^{k-1}(e^{-\alpha x}(y'-\alpha y))$$
$$= (D-\alpha)^{k-1}((y'-\alpha y) \text{ (nach Induktionsannahme) } = (D-\alpha)^k y$$

Das bedeutet:

$$y \in V_i \Leftrightarrow (D-\alpha_i)^{k_i} y = 0 \Leftrightarrow D^k(e^{-\alpha_i x}y) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha_i x} y \text{ ist ein Polynom vom Grade } < k_i(\text{ oder } 0)$$

Es folgt

Satz 34. *Die Lösungen $y(x)$ der homogenen linearen Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten a_i sind genau alle

$$y = \sum_{i=1}^{r} P_i(x) e^{\alpha_i x}, \text{ wo } P_i(x) \text{ ein Polynom vom Grade } < k_i \text{ (oder 0) ist .}$$

Mit denselben Methoden läßt sich sogar die inhomogene Gleichung $F(D)y = b(x)$ lösen: Man setzt zur Abkürzung $(X-\alpha_j)^{k_j} = p_j(X)$ und definiert die Kofaktoren P_j durch $P_j p_j = F$. Aus P_j und p_j kann man 1 kombinieren. Multipliziert man diese r Gleichungen und faßt geeignet zusammen (das geht auf viele Weisen), so hat man 1 aus den P_j kombiniert:

$$1 = w_1 P_1 + ... + w_r P_r$$

Man setzt $e_j(X) = w_j(X)P_j(X)$. Dann ist $p_j e_j$ durch F teilbar für alle j . Mit $y_j = e_j(D)y$ ist nun $y = \sum_{j=1}^r y_j$ und

$$F(D)y = b \Leftrightarrow p_j(D)y_j = F(D)w_j(D)y = w_j(D)b \text{ für alle } j$$

Nach dem Lemma bedeutet die rechte Seite

$$w_j(D)b = e^{\alpha_j x} D^{k_j}(e^{-\alpha_j x} y_j) \text{ für alle } j$$

Das heißt, $e^{-\alpha_j x} y_j$ ist k_j -fache Stammfunktion von $e^{-\alpha_j x} w_j(D)b$. Eine solche erhält man durch k_j -fache Integration, schöner sieht vielleicht die "Faltung" aus: Für

$$H(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} h(t)\, dt \text{ gilt } H^{(k)} = h$$

Mit ihrer Hilfe erhalten wir als eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $F(D)y = b$

$$y(x) = \sum_{i=1}^{r} e^{\alpha_i x} \int_0^x \frac{(x-t)^{k_i-1}}{(k_i-1)!} e^{-\alpha_i t} (w_i(D)b)(t)\, dt$$

Beispiel: Man löse $y'' + y = \cos x$. Hier ist $F(X) = X^2 + 1$ mit den Nullstellen i und $-i$.

$$p_1(X) = X - i = P_2,\ p_2(X) = X + i = P_1,\ k_1 = k_2 = 1$$

$$w_1 = \frac{1}{2i},\ w_2 = -\frac{1}{2i}$$

Auswertung des Integrals ergibt

$$y_1 = \frac{xe^{ix}}{4i} - \frac{i}{4}\sin x$$

y_2 entsteht daraus, indem man i durch $-i$ ersetzt, und $y = y_1 + y_2$ ist dann der doppelte Realteil von y_1 :

$$y(x) = \frac{1}{2} x \sin x$$

ist eine spezielle Lösung der ihomogenen Gleichung $y'' + y = \cos x$ (was man nachträglich natürlich leicht bestätigen kann). Man sieht: die Werte an den Stellen $x = \frac{4n+1}{2}\pi$ wachsen mit x (Resonanz).

13. Spektralsatz

Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation ist jede reelle symmetrische Matrix diagonalisierbar. Diesen Satz kann man verallgemeinern:

V sei ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.
Definition: Eine Abbildung $H : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt hermitesche Form, wenn

1. $H(x,y)$ additiv in x bei festem y und umgekehrt.
2. $H(y,x) = \overline{H(x,y)}$
3. $H(x,\lambda y) = \lambda H(x,y)$

Aus 2. und 3. folgt $H(\lambda x, y) = \overline{H(y,\lambda x)} = \overline{\lambda H(y,x)} = \bar{\lambda} H(x,y)$. Nach 2. ist außerdem $H(x,x)$ reell für alle x. Ist $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V über $\mathbb{C}$, so ist H durch die n^2 Werte $H(v_i, v_j) =: a_{ij} \in \mathbb{C}$ festgelegt; denn für beliebige $x = \sum x_i v_i$ $(x_i \in \mathbb{C})$ und y gilt

$$H(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} H(x_i v_i, y_j v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i a_{ij} y_j$$

Aus 2. folgt $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, d.h. für die Matrix A der a_{ij} gilt $\bar{A}' = A$.

Definition: Eine komplexe Matrix A mit $A = \bar{A}'$ heißt hermitesch.

Nach Basiswahl in V entsprechen die hermiteschen Formen auf V umkehrbar eindeutig den hermiteschen Matrizen.

Definition: Eine hermitesche Form H heißt positiv definit, wenn $H(x,x) > 0$ für alle $x \in V, x \neq 0$.
Definition': Eine hermitesche Matrix A heißt positiv definit, wenn $\bar{x}' A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$.

Definition: Eine hermitesche Form heißt nicht ausgeartet, wenn es zu $x \neq 0$ ein y gibt mit $H(x,y) \neq 0$.

Natürlich ist jede positiv definite Form erst recht nicht ausgeartet.
Sei $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V und $H(v_i, v_j) = a_{ij}$ und A die Matrix der a_{ij}.

$$H \text{ nicht ausgeartet } \Leftrightarrow H(x,y) = 0 \text{ für alle } y \text{ nur falls } x = 0$$

$$\Leftrightarrow H(x, v_j) = 0 \text{ für alle } j \text{ nur falls } x = 0 \Leftrightarrow H(\sum_i \xi_i v_i, v_j) = \sum_i \bar{\xi}_i a_{ij} = 0 \text{ für alle } j \text{ nur falls alle } \xi_i = 0$$

$$\Leftrightarrow A \text{ invertierbar}$$

Lemma 1. *Ist H nicht ausgeartet, so gibt es zu jeder Basis $v_1, ..., v_n$ von V eine Basis $v_1^*, ..., v_n^*$ mit $H(v_i, v_j^*) = \delta_{ij} (= H(v_j^*, v_i))$.*

Beweis: Sei A die Matrix der $H(v_i, v_j) = a_{ij}$ und $B = A^{-1}$. Für $v_j^* = \sum_k b_{kj} v_k$ gilt

$$H(v_i, v_j^*) = \sum_k H(v_i, v_k) b_{kj} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij}$$

Es ist klar, daß die v_j^* auch eine Basis biden und daß sie durch $v_1, ..., v_n$ und H bestimmt sind.

Definition: $v_1^*, ..., v_n^*$ heißt die bezüglich H zu $v_1, ..., v_n$ duale Basis.

Lemma 2. *Ist H nicht ausgeartet, so gibt es zu jeder linearen Abbildung $f : V \to \mathbb{C}$ (sog. Linearform) einen Vektor $a \in V$ mit $f(x) = H(a,x)$ für alle $x \in V$.*

Beweis: Sei $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V und $v_1^*, ..., v_n^*$ die dazu duale. Dann gilt $f(v_i) = H(\sum_j \overline{f(v_j)} v_j^*, v_i)$ für alle i. $a = \sum_j \overline{f(v_j)} v_j^*$ leistet das Verlangte.

Lemma 3. *Ist H sogar positiv definit, so gilt für jeden Unterraum U*

$$V = U \oplus U^\perp$$

($U^\perp$ ist definiert durch $U^\perp = \{x \in V \mid H(x,y) = 0$ für alle $y \in U\}$)

Beweis: Ergänze eine Basis $v_1, ..., v_k$ von U zu einer Basis $v_1, ..., v_n$ von V. Sei $v_1^*, ..., v_n^*$ die dazu duale Basis.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^* \in U^\perp \Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1}^n H(v_j, \lambda_i v_i^*) = \lambda_j \text{ für } j = 1, .., k$$

Hieraus folgt, daß $v_{k+1}^*, ..., v_n^*$ eine Basis von $U^\perp$ bilden. Da H positiv definit ist, ist $U \cap U^\perp = 0$ (ein Vektor im Durchschnitt müßte ja auf sich selber "senkrecht stehen"), $v_1, ..., v_k, v_{k+1}^*, ..., v_n^*$ bilden eine Basis von V und $V = U \oplus U^\perp$.

Wir nehmen jetzt einen Vektorraum V über $\mathbb{C}$ mit einer festen, positiv definiten hermiteschen Form, die wir einfach mit (x, y) bezeichnen. Ist $V = \mathbb{C}^n$, so können wir (aber müssen nicht) uns vorstellen, daß $(x,y) = \bar{x}'y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$. Sei ϕ ein Endomorphismus von V. Für festes y ist die Abbildung $x \mapsto (y, \phi x)$ von V nach $\mathbb{C}$ linear. Nach Lemma 2 gibt es (zu jedem y genau ein) a mit $(y, \phi x) = (a, x)$ für alle $x \in V$. Die Zuordnung $y \mapsto a$ ist linear und wird mit ϕ^* bezeichnet. Wir haben uns also mit Hilfe von Lemma 2 überlegt, daß durch

$$(y, \phi x) = (\phi^* y, x) \text{ für alle } x, y$$

ein Endomorphismus ϕ^* von V vernünftig definiert ist. ϕ^* heißt die zu ϕ adjungierte Abbildung. Eigenschaften:

1. $(\phi + \psi)^* = \phi^* + \psi^*$
2. $(\phi\psi)^* = \psi^*\phi^*$
3. $(\lambda\phi)^*) = \bar{\lambda}\phi^*$
4. $\phi^{**} = \phi$

Exemplarisch beweisen wir 3.: $((\lambda\phi)^* y, x) = (y, \lambda\phi x) = \lambda(y, \phi x) = \lambda(\phi^* y, x) = (\bar{\lambda}\phi^* y, x)$.

Beispiel: $V = \mathbb{C}^n$ und $(x,y) = \bar{x}'y$. Hier ist ϕ die Multiplikation mit einer Matrix B: $\phi(x) = Bx$. Aus

$$(\phi^* y, x) = (y, \phi x) = \bar{y}'Bx = \overline{\bar{B}'y}' x = (\bar{B}'y, x)$$

folgt, daß $\phi^*(y) = \bar{B}'y$. Man nennt $\bar{B}' =: B^*$ die zu B adjungierte Matrix. An diesem Beispiel ist unmittelbar klar, daß * die Eigenschaften 1.-4. hat.

Lemma 4. *Für jeden Endomorphismus ϕ gilt*

$$\textit{Kern } \phi = (\textit{ Bild } \phi^*)^\perp$$

und dementsprechend

(1) $$V = \textit{ Kern } \phi \oplus \textit{ Bild } \phi^*$$

Beweis:

$$y \perp \text{ Bild } \phi^* \Leftrightarrow (y, \phi^* V) = 0 \Leftrightarrow (\phi y, V) = 0 \Leftrightarrow \phi y = 0$$

Die zweite Behauptung folgt daraus mit Lemma 3.

Anwendung: Wir setzen jetzt speziell voraus, daß ϕ mit ϕ^* vertauschbar sei: $\phi\phi^* = \phi^*\phi$. Ein solches ϕ heißt *normal.* Die Normalität von ϕ garantiert, daß nicht nur der linke, sondern auch der rechte Summand in (1) bei ϕ in sich abgebildet wird. Man hat also, wenn beide Räume nicht 0 sind, eine direkte Zelegung von V in zwei echte ϕ-invariante Unterräume. Nun ist es leicht, den Spektralsatz zu beweisen:

Satz 35. *(Spektralsatz) Für jeden normalen Endomorphismus ϕ von V besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für ϕ.*

Beweis: Sei ϕ ein normaler Endomorphismus und λ ein Eigenwert von ϕ. (Da $K = \mathbb{C}$, ist λ vorhandem.) Dann ist Kern $(\phi - \lambda) \neq 0$, und (1) mit $\phi - \lambda$ statt ϕ lautet

$$V = \text{ Kern } (\phi - \lambda) \oplus \text{ Bild } (\phi^* - \bar{\lambda})$$

wobei die beiden Summanden aufeinander senkrecht stehen. Mit ϕ ist auch $\phi - \lambda$ normal, und *beide* Summanden werden bei ϕ in sich abgebildet. Nach Induktionsannahme besitzt Bild $(\phi^* - \bar{\lambda})$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für ϕ. Setzt man diese mit irgendeiner Orthonormalbasis von Kern $(\phi - \lambda)$ zusammen, so erhält man die Behauptung.

Bemerkung: Umgekehrt ist jeder Endomorphismus, der eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren besitzt, normal: Wenn $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ und $\phi v_i = \lambda_i v_i$, $(\phi^* v_i, v_j) = (v_i, \phi v_j) = (v_i, \lambda_j v_j) = \lambda_j (v_i, v_j) = \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_i (v_i, v_j) = (\bar{\lambda}_i v_i, v_j)$ für alle i, j, also $\phi^* v_i = \bar{\lambda}_i v_i$, also ist $\phi^* \phi = \phi \phi^*$.

Umformulierung: Für jeden Eigenwert λ setzt man Kern $(\phi - \lambda) = V_\lambda$. Dann ist V orthogonale direkte Summe (d.i. eine direkte Summe, in der die Summanden paarweise aufeinander senkrecht stehen) der V_λ. Jeder Vektor $v \in V$ läßt sich eindeutig darstellen als eine $\sum_\lambda v_\lambda$ mit $v_\lambda \in V_\lambda$. Man definiert die Endomorphismen π_λ von V durch $\pi_\lambda(v_\mu) = v_\lambda$, wenn $\lambda = \mu$, und 0 sonst. Offenbar ist

1. $\pi_\lambda^2 = \pi_\lambda$ und $\pi_\lambda \pi_\mu = 0$ wenn $\lambda \neq \mu$.
2. Aus der Definition folgt $\sum_\lambda \pi_\lambda = id$, und der Spektralsatz besagt $\sum_\lambda \lambda \pi_\lambda = \phi$.
3. Die π_λ sind selbsadjungiert:

$$(\pi_\nu^* v_\lambda, v_\mu) = (v_\lambda, \pi_\nu v_\mu) = \delta_{\mu\nu}(v_\lambda, v_\mu) = \delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\mu} = (\pi_\nu v_\lambda, v_\mu)$$

Den Spektralsatz kann man also auch so formulieren:

Satz 35'. *Zu jedem normalen Endomorphismus gibt es eine Schar selbstadjungierter ($\pi_\lambda = \pi_\lambda^*$), sich gegenseitig annullierender($\pi_\lambda \pi_\mu = 0$ für $\lambda \neq \mu$) Projektionen ($\pi_\lambda^2 = \pi_\lambda$) mit*

$$\phi = \sum_\lambda \lambda \pi_\lambda$$

Dabei durchläuft λ die Eigenwerte von ϕ. $\{\pi_\lambda\}_\lambda$ nennt man die Spektralschar von ϕ.

Nutzen: Wegen der in Satz 35' aufgezählten Eigenschaften ist für jedes Polynom f

$$f(\phi) = \sum_\lambda f(\lambda) \pi_\lambda \tag{1}$$

Anwendung: Zu je d verschiedenen Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_d$ und vorgegebenen Werten $\gamma_1, ..., \gamma_d$ gibt es ein Polynom vom Grade $\leq d - 1$, welches an der Stelle λ_i den Wert γ_i besitzt für jedes $i = 1, ..., d$, nämlich

$$f(X) = \sum_{j=1}^{d} \gamma_j \prod_{i=1, i \neq j}^{d} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_j - \lambda_i)} \qquad \text{Lagrange-Interpolation} \tag{I}$$

Es gibt also Polynome f_λ mit

$$f_\lambda(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \lambda = \mu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Setzt man ϕ in diese Polynome ein, so erhält man nach (1)

$$f_\lambda(\phi) = \pi_\lambda$$

in Worten: die Projektionen der Spektralschar lassen sich als Polynome in ϕ schreiben.

Beispiel: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist reell und schiefsymmetrisch, also normal.

1. Das charakteristische Polynom von A ist $X^3 + 3X$. Die Eigenwerte von A sind also $0, \zeta, -\zeta = \bar{\zeta}$, wobei $\zeta^2 = -3$.
2. Durch Lösen der linearen Gleichungen $Av = \lambda v$ für v erhält man die Eigenvektoren. Ein orthonormiertes System von Eigenvektoren ist

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_\zeta = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 1-\zeta \\ 1+\zeta \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_{-\zeta} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 1+\zeta \\ 1-\zeta \\ -2 \end{pmatrix}$$

(Die Vektoren sind natürlich nur bis auf komplexe Faktoren vom Betrage 1 bestimmt). Man sieht: diese Vektoren sind in der Tat paarweise orthogonal: $\bar{x}'y = 0$ für je zwei verschiedene von ihnen.
3. Die Polynome f_λ sind

$$f_0(X) = \frac{(X-\zeta)(X+\zeta)}{(0-\zeta)(0+\zeta)} = \frac{1}{3}(X^2+3)$$

$$f_\zeta(X) = \frac{1}{-6}(X^2 + \zeta X) \text{ und } F_{-\zeta}(X) = \frac{1}{-6}(X^2 - \zeta X)$$

Setzt man A in diese Polynome ein, so erhält man die Projektionen

$$P_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P_\zeta = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1-\zeta & -1+\zeta \\ -1+\zeta & 2 & -1-\zeta \\ -1-\zeta & -1+\zeta & 2 \end{pmatrix}, P_{-\zeta} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1+\zeta & -1-\zeta \\ -1-\zeta & 2 & -1+\zeta \\ -1+\zeta & -1-\zeta & 2 \end{pmatrix}$$

Man prüft nach, daß tatsächlich

$$P_0 + P_\zeta + P_{-\zeta} = \mathbf{1} \text{ und } 0 \cdot P_0 + \zeta \cdot P_\zeta - \zeta P_{-\zeta} = A$$

Anwendungen des Spektralsatzes:

1. Quadratwurzel aus einer positiv definiten hermiteschen Matrix: Sei $A = \bar{A}'$. Nach dem Spektralsatz ist $A = \sum_\lambda \lambda P_\lambda$ mit selbstadjungierten (d.h. jetzt hermiteschen) P_λ, $P_\lambda P_\mu = \delta_{\lambda\mu} P_\lambda$. Da A hermitesch, sind alle λ reell, und ist A überdies positiv definit, so sind alle $\lambda > 0$. Sei $\sqrt{\lambda}$ die positive Quadratwurzel aus λ. Man setzt $B = \sum_\lambda \sqrt{\lambda} P_\lambda$. Dann ist $B = \bar{B}'$ positiv definit und $B^2 = A$. Nach der Interpolationsformel (I) gibt es ein Polynom f mit $f(A) = B$. Sei nun C eine weitere hermitesche positiv definite Matrix mit $C^2 = A$. Dann sind A und C vertauschbar: $AC = CA$. Dann ist aber auch C mit jedem Polynom in A, also z.B. mit B vertauschbar, und $0 = B^2 - C^2 = (B+C)(B-C)$. Mit B und C ist $B + C$ positiv definit, erst recht invertierbar, und es folgt $B - C = 0$. Wir haben also bewiesen

Satz 36. *Zu jeder positiv definiten hermiteschen Matrix A gibt es genau eine positiv definite hermitesche Matrix B mit $B^2 = A$, und B kann als Polynom in A geschrieben werden.*

2. Polarzerlegung. Sei X eine invertierbare Matrix. Dann ist $A = \bar{X}'X$ positiv definit. Man schreibt $A = B^2$ wie in 1. Dann ist $\overline{XB^{-1}}' \cdot XB^{-1} = \mathbf{1}$. Für die Matrix $U = XB^{-1}$ gilt also $\bar{U}'U = \mathbf{1}$.

Definition Eine Matrix U heißt unitär, wenn $\bar{U}'U = \mathbf{1}$.
Die obige Überlegung zeigt

Satz 37. *Jede invertierbare Matrix X ist Produkt einer positiv definiten und einer unitären Matrix : $X = U \cdot B$. (Polarzerlegung)*

Zusatz: U und B sind durch X bestimmt.
Beweis: Angenommen, $X = UB$ und $X = U_1 B_1$. Dann ist $\bar{X}'X = B^2$ und genauso $= B_1^2$. Wegen der Eindeutigkeit der Quadratwurzel in 1. folgt $B = B_1$ und danach auch $U = U_1$.

Für $n=1$ erhält man die Polarzerlegung der komplexen Zahlen $z \neq 0$: $z = re^{it} = r(\cos t + i \sin t)$ mit $r = \sqrt{z\bar{z}} > 0$, denn die komplexen Zahlen u mit $\bar{u}u = 1$ sind genau die e^{it} mit reellem t.

Nachdem wir nun viele Matrizen kennengelernt haben, die sich diagonalisieren lassen, nämlich

1. alle reellen symmetrischen Matrizen (sogar über $\mathbb{R}$)
2. alle normalen Matrizen (über $\mathbb{C}$)
3. alle Matrizen, deren charakteristisches Polynom in lauter *verschiedene* Linearfaktoren zerfällt

halten wir noch einmal ein hinreichendes *und* notwendiges Kriterium fest:

Satz 38. *Ein Endomorphismus ϕ eines Vektorraumes V ist genau dann diagonalisierbar, wenn sein Minimalpolynom m in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt.*

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Sei $v_1, ..., v_n$ eine Basis aus Eigenvektoren: $\phi v_i = \alpha_i v_i$. Sind oE $\alpha_1, ..., \alpha_k$ die verschiedenen Eigenwerte, so ist $m(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \alpha_i)$ das Minimalpolynom von ϕ. Es ist ein Produkt von verschiedenen Linearfaktoren.
" $\Leftarrow$ ": Nach dem Zerlegungssatz zerfällt V in eine direkte Summe: $V = \oplus V_i$ mit $V_i = \{x \in V \mid \phi x = \alpha_i x\}$, wenn $X - \alpha_i$ die verschiedenen Linearfaktoren im Minimalpolynom von ϕ sind. In V_i ist jeder Vektor Eigenvektor, man findet also (durch Zusammensetzen von Basen der V_i) eine Basis aus Eigenvektoren von V.

Zum Schluß ein schwacher aber trotzdem sehr nützlicher Ersatz für Diagonalisierbarkeit:

Satz 39. *Enthält K alle Eigenwerte der Matrix A, so läßt sich A über K in Dreiecksgestalt transformieren.*

Beweis: Sei λ ein Eigenwert von A. Nach Definition gibt es einen Vektor $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$. Man ergänzt v zu einer Basis des K^n. Die aus diesen Spaltenvektoren gebildete Matrix P ist invertierbar und erfüllt $AP = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ mit einer $(n-1)$-reihigen Matrix B. Für die charakteristischen Polynome gilt $\chi_A(X) = (X - \lambda)\chi_B(X)$. Also liegen die Eigenwerte von B auch alle in K. Nach Induktionsannahme gibt es eine invertierbare Matrix Q ,so daß $Q^{-1}BQ$ eine (obere) Dreiecksmatrix ist. Mit $R = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ hat dann $R^{-1}AR$ Dreiecksgestalt.
Diese Dreiecksmatrix hat natürlich dasselbe charakteristische Polynom wie A. Ihre Diagonalglieder sind also genau die Eigenwerte von A.

14. Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen

Ziel ist festzustellen, ob zwei Matrizen A und B sich ineinander transformieren lassen:

$$B = T^{-1}AT \text{ mit einer invertierbaren Matrix } T$$

Dazu müssen sie natürlich dasselbe charakteristische Polynom haben. Aber das ist, wie wir wissen, keineswegs hinreichend.

Definition: Zwei Matrizen A und B aus $M_n(K)$ heißen ähnlich (besser wäre zu sagen konjugiert), wenn es eine invertierbare Matrix T gibt mit

$$B = T^{-1}AT, \quad \text{Bezeichnung } : A \approx B$$

Ist R ein kommutativer Ring (z.B. $\mathbb{Z}$ oder der Ring $K[X]$ aller Polynome in einer Unbestimmten X über einem Körper K oder vielleicht sogar auch ein Körper), so bilden die Matrizen mit Einträgen aus R einen Ring, denn zur Bildung der Koeffizienten im Produkt zweier Matrizen muß ja nur multipliziert und addiert werden. Dieser Ring wird mit $M_n(R)$ bezeichnet.

Definition: Zwei Matrizen A und B aus $M_n(R)$ heißen äquivalent, wenn es zwei Matrizen $P, Q \in M_n(R)$ gibt, die in $M_n(R)$ invertierbar sind, mit

$$B = PAQ, \quad \text{Bezeichnung } : A \sim B$$

Achtung! Eine Matrix mit Einträgen aus einem Körper K ist (in $M_n(K)$) genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht 0 ist. Damit eine Matrix mit ganzzahligen Einträgen invertierbar in $M_n(\mathbb{Z})$ ist, muß aber die Determinante nicht nur ungleich 0, sondern ± 1 sein; denn aus $AB = \mathbf{1}$ folgt $|A||B| = 1$, und $|A|$ und $|B|$ sind ganze Zahlen, wenn A und B ganze Einträge haben. Umgekehrt ist A ganzzahlig invertierbar, wenn $|A| = \pm 1$, denn dann ist $A^{-1} = \pm \tilde{A}$, und $\tilde{A}$ hat ganze Koeffizienten. Analog muß eine Matrix, die in $M_n(K[X])$ invertierbar ist, nicht nur von 0 verschiedene sondern zudem konstante Determinante haben.

Aus $\approx$ über K folgt trivialerweise $\sim$ über K (man nehme $Q = T = P^{-1}$). Grundlage für alles Folgende ist

Satz 40. *(Frobenius) Für irgendzwei Matrizen $A, B \in M_n(K)$ gilt*

$$A \approx B \text{ in } K \iff X\mathbf{1} - A \sim X\mathbf{1} - B \text{ in } K[X]$$

Beweis: " $\Rightarrow$ " ist trivial.
" $\Leftarrow$ " : Seien P und Q invertierbare Matrizen in $M_n(K[X])$ und

$$P(X\mathbf{1} - A) = (X\mathbf{1} - B)Q \tag{1}$$

Die Koefizienten von P sind Polynome. Wir ordnen nach Potenzen von X und erhalten

$$P = P_0 + P_1X + P_2X^2 + ... + P_kX^k \text{ und } Q = Q_0 + Q_1X + Q_2X^2 + ... + Q_mX^m \tag{2}$$

wobei die Matrizen P_i und Q_i Koeffizienten in K haben. Verzichten wir darauf, daß der höchste Koeffizient nicht 0 ist, so können wir oE $m = k$ nehmen. Setzt man (2) in (1) ein, so kommt

$$-P_0A + (P_0 - P_1A)X + ... + (P_{k-1} - P_kA)X^k + P_kX^{k+1} = -BQ_0 + (Q_0 - BQ_1)X + ... + Q_kX^{k+1}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{array}{ccccccc} -P_0A & & & = & -BQ_0 & & \\ P_0 & - & P_1A & = & Q_0 & - & BQ_1 \\ P_1 & - & P_2A & = & Q_1 & - & BQ_2 \\ \vdots & & & & & & \\ P_{k-1} & - & P_kA & = & Q_{k-1} & - & BQ_k \\ P_k & & & = & Q_k & & \end{array}$$

Multipliziert man die zweite Zeile von rechts mit A , die dritte mit A^2 ,...., die letzte mit A^{k+1} und addiert, so kommt auf der linken Seite offensichtlich 0 heraus und auf der rechten

$$-BQ_0 + (Q_0 - BQ_1)A + (Q_1 - BQ_2)A^2 + ... + (Q_{k-1} - BQ_k)A^k + Q_k A^{k+1}$$

Diese Summe ist also 0, und bringt man alle Terme mit B auf die linke Seite, so erhält man

$$B(Q_0 + Q_1A + ... + Q_kA^k) = (Q_0 + Q_1A + ... + Q_kA^k)A$$

Für die Matrix $U = \sum_{i=0}^{k} Q_iA^i \in M_n(K)$ gilt also $BU = UA$. Wenn wir nun noch zeigen können, daß U invertierbar ist, sind wir fertig. Dazu benutzen wir nun, daß Q invertierbar in $M_n(K[X])$ ist: Es gibt eine Matrix R, die wir wieder in der Gestalt $R = R_0 + R_1X + ... + R_mX^m$ mit $R_i \in M_n(K)$ schreiben, so daß $RQ = \mathbf{1}$. Multiplizieren wir das Produkt RQ aus und sortieren nach Potenzen von X , so folgt

(3) $\quad R_0Q_0 = \mathbf{1}, R_0Q_1 + R_1Q_0 = 0, ..., R_mQ_k = 0,$ kurz $\displaystyle\sum_{0\le i\le m, 0\le j\le k, i+j=s} R_iQ_j = 0$ für alle $s \geq 1$

Wir hatten $BU = UA$. Dann ist natülich auch $B^iU = UA^i$ für alle $i \geq 1$. Nun wird

$$\sum_{i=0}^{m} R_iB^iU = \sum_{i=0}^{m} R_iUA^i = \sum_{i=0}^{m}\sum_{0=1}^{k} R_iQ_jA^{j+i} = \sum_{s=0}^{m+k}(\sum_{0\le i\le m, 0\le j\le k, i+j=s} R_iQ_j)A^s = \mathbf{1}$$

nach (3). Dies setzt in Evidenz, daß U eine Inverse besitzt.

Die Frage nach $\approx$ in K ist also durch den Satz von Frobenius zurückgeführt auf die Frage nach $\sim$, allerdings in $K[X]$. Die Frage nach $\sim$ in K haben wir Hilfe des Gauß-Algorithmus beantwortet. Genauer haben wir in Kap 7 bewiesen: Zu jeder Matrix A gibt es invertierbare Matrizen P und Q mit

$$PAQ = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ wobei } r = \text{ Rang } A$$

Die $\sim$-Klasse über K wurde also durch den Rang bestimmt: zwei Matrizen sind äquivalent genau dann, wenn sie denselben Rang besitzen. Die nicht unerhebliche Erschwerung besteht jetzt darin, daß wir statt im Körper K im Ring $K[X]$ arbeiten müssen. Dennoch gelingt es aufgrund der besonderen Struktur dieses Ringes (Division mit Rest), durch einen Algorithmus jede Matrix aus $M_n(K[X])$ in eine "Normalform" überzuführen und so zu entscheiden, ob zwei Matrizen in $M_n(K[X])$ äquivalent sind oder nicht:

Satz 41. *Zu jeder Matrix $A \in M_n(K[X])$ gibt es invertierbare Matrizen $P, Q \in M_n(K[X])$ mit*

$$PAQ = \begin{pmatrix} f_1(X) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n(X) \end{pmatrix}$$

wobei man für die Polynome $f_i(X)$ noch erreichen kann, daß

$$f_1(X) \mid f_2(X) \mid ..... \mid f_n(X)$$

Beweis: Man findet P und Q als Produkt elementarer Matrizen $\mathbf{1} + g \cdot e_{ij}$ mit $g \in K[X]$ und $i \neq j$ (invers dazu ist $\mathbf{1} - g \cdot e_{ij}$) und von Diagonalmatrizen mit von 0 verschiedenen Einträgen aus K.

i. Multiplikation von links (rechts) mit einer elementaren Matrix bedeutet Addition eines Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderem.

ii. Multiplikation von links (rechts) mit $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ bedeutet Multiplikation der i-ten Zeile (Spalte) mit λ_i.

iii. Wir wissen, daß man mit Hintereinanderausführung von i. und ii. Vertauschen von Zeilen (Spalten) bewirken kann.

Wir haben also den Satz bewiesen, wenn wir durch die Manipulationen i. bis iii. die gewünschte Gestalt erzeugen können. Dazu gehen wir wie folgt vor:

1. Suche a_{ij} mit grad $a_{ij} =: d \leq$ grad a_{rs} für alle r, s.
2. Vertausche die i-te mit der ersten Zeile und danach die j-te mit der ersten Spalte. In der neuen Matrix ist
$$\text{grad } a_{11} = d \leq \text{ grad } a_{rs} \text{ für alle } r, s$$
3. Dividiere die a_{1i} für $i \geq 2$ mit Rest durch a_{11} : $a_{1i} = q_i a_{11} + r_i$.
4. Subtrahiere das q_i-fache der ersten Spalte von der i-ten für $i = 2, ..., n$. Dadurch wird die erste Zeile zu $(a_{11}, r_2, ..., r_n)$.
5. Wenn nicht alle $r_i = 0$, so hat die neue Matrix Minimalgrad $d' < d$. Beginne wieder mit Schritt 2. und d' statt d.
6. Wenn alle $r_i = 0$, ist die neue erste Zeile $(a_{11}, 0, ..., 0)$. Führe die Schritte 3.,4.,5. mit der ersten Spalte statt der ersten Zeile durch.
7. Nach endlich vielen Durchlaufungen von 1. bis 6. wird die Matrix zu
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & .... & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
Wenn a_{11} alle Koeffizienten der Matrix B teilt, setze das Verfahren mit der Matrix B statt A fort. Wenn aber etwa a_{11} kein Teiler von b_{ij} ist, addiere die i-te Zeile zur ersten und erhalte die neue erste Zeile $(a_{11}, .., b_{ij}, ...)$. Teile b_{ij} mit Rest durch a_{11}: $b_{ij} = q a_{11} + r$. Dann ist $r \neq 0$ und grad $r <$ grad $a_{11} = d$. Subtrahiere das q-fache der ersten Spalte von der j-ten. Dadurch entsteht eine Matrix mit Minimalgrad $< d$. Beginne wieder bei 2.

Solange man den gewünschten Endzustand nicht erreicht hat, kann man den Minimalgrad der Matrix erniedrigen.

Beispiel mit ganzen Zahlen statt Polynomen:

$$A = \begin{pmatrix} 36 & 84 \\ 24 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 16 & 24 \\ 84 & 36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 84 & -48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -48 & 84 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -48 & 180 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 180 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 180 \\ 0 & 180 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 180 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 180 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 180 & -360 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -360 \end{pmatrix}$$

Wichtig für die Anwendung von Satz 40 und 41 ist

Satz 42. *Die Polynome $f_1, ..., f_n$ in Satz 41 sind durch die Matrix A bestimmt; für jedes $k = 1, ..., n$ ist nämlich $f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_k$ der größte gemeinsame Teiler aller k-reihigen Unterdeterminanten von A. (Das ist zu verstehen bis auf konstante Faktoren $\neq 0$, die f_i und auch ggT sind ja nur bis auf solche bestimmt).*

Beweis: Wir zeigen

i. Die letzte Behauptung stimmt für die Matrix
$$\begin{pmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & f_n \end{pmatrix}$$

ii. Der besagte ggT ändert sich nicht bei elementaren Umformungen (mit Hilfe derer die Diagonalmatrix hergestellt wurde).

Zu i.: Besteht die herausgegriffene Teilmatrix U aus den den Zeilen Nummer $i_1 < i_2 < ... < i_k$ und den Spalten mit denselben Nummern, so ist $|U| = f_{i_1} \cdot ... \cdot f_{i_k}$. Wählt man für Zeilen und Spalten von

U nicht dieselben Nummern, so enthält U eine Nullzeile oder eine Nullspalte und $|U| = 0$. Wegen der Teilbarkeitsbedingung $f_1|...|f_n$ ist der ggT aller dieser Zahlen gleich $f_1 \cdot ... \cdot f_k$.
Zu ii.: Es entstehe A' aus A durch Addition des g-fachen der i-ten Zeile von A zur j-ten (g ein Polynom). Sei U irgendeine k-reihige Untermatrix von A und U' die aus denselben Zeilen und Spalten gebildete Untermatrix von A'.

1. Zeile i und Zeile j treffen U. Dann ist $|U'| = |U|$ nach bekannter Eigenschaft der Determinante (Kap. 7)
2. Zeile j trifft U nicht. Dann ändert sich in U gar nichts: $U = U'$.
3. Zeile j trifft U, aber Zeile i nicht. Dann ist, weil die Determinante eine lineare Funktion ihrer Zeilen ist, $|U'| = |U| \pm g|U''|$, wobei U'' die Teilmatrix von A ist, in der statt der j-ten die i-te Zeile aber sonst dieselben Zeilen und Spalten ausgewählt wurden wie für U.

Der ggT aller $|U|$ ist also derselbe wie der aller $|U'|$.

Definition: Die f_i heißen die Invariantenteiler von A.

Beispiel: Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

Für $X\mathbf{1} - A$ bestimmen wir die Invariantenteiler:

$$X\mathbf{1} - A = \begin{pmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ -2 & -2 & X-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & X-2 & -1 \\ X-2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & X-3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X-2 & 1-(X-2)^2 & 1+X-2 \\ -2 & -2+2(X-2) & X-3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X-2 & -X^2+4X-3 & X-1 \\ -2 & 2X-6 & X-5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -X^2+4X-3 & X-1 \\ 0 & 2X-6 & X-5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(X-1)(X-3) & X-1 \\ 0 & 2(X-3) & X-5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & -(X-1)(X-3) \\ 0 & X-5 & 2(X-3) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & x-5 & 2(X-3)+(X-3)(X-5) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & X-5 & (X-3)^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & -4 & (X-3)^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & (X-3)^2 \\ 0 & X-1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & (X-3)^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(X-3)^2(X-1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (X-3)^2(X-1) \end{pmatrix}$$

Durch Determinantenbildung erhalten wir das charakteristische Polynom:

$$|X\mathbf{1} - A| = (X-1)(X-3)^2$$

Dasselbe charakteristische Polynom hat die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ist $A \approx B$? Um das zu entscheiden, müssen wir auf $X\mathbf{1} - B$ dieselbe Prozedur anwenden:

$$\begin{pmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X-3 & 0 \\ 0 & 0 & X-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X-1 & X-3 & 0 \\ 0 & X-3 & 0 \\ 0 & 0 & X-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X-1 & -2 & 0 \\ 0 & X-3 & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -2 & X-1 & 0 \\ X-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ X-3 & \frac{1}{2}(X-1)(X-3) & 0 \\ 0 & 0 & X-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-3 & 0 \\ 0 & 0 & (X-1)(X-3) \end{pmatrix}$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz 42 ist A nicht konjugiert zu B.

Zum Schluß wollen wir die sogenannten zyklischen Räume durch ihre Invariantenteiler charakterisieren:

Definition: Ein Vektorraum V mit Endomorphismus ϕ heißt ϕ-zyklisch, wenn es einen Vektor $v \in V$ gibt, dessen successive ϕ-Bilder V aufspannen.

Sei $k \geq 1$ maximal, so daß $v, \phi v, ..., \phi^{k-1}v$ linear unabhängig sind. Dann ist $\phi^k v$ eine Linearkombination von ihnen:

(1) $$\phi^k v + a_{k-1}\phi^{k-1}v + ... + a_1\phi v + a_0 v = 0$$

Wendet man ϕ auf (1) an und ersetzt dann $\phi^k v$ durch $-a_{k-1}\phi^{k-1}v - .... - a_0 v$, so erhält man auch $\phi^{k+1}v$ als Linearkombination von $v, ..., \phi^{k-1}v$ usw.: alle successiven Bilder von v sind Linearkombinationen der ersten k. Folglich erzeugen letztere V, und nach Wahl von k sind sie linear unabhängig. Also bilden sie eine Basis von V, und bezüglich dieser Basis hat ϕ die Matrix

(Z) $$A = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & -a_0 \\ 1 & ... & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Das Minimalpolynom von ϕ ist

(2); $$f(X) = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + ... + a_1X + a_0$$

denn einerseits ist $f(\phi)\phi^j v = 0$, also $f(\phi)V = 0$, aber anderseits ist für ein Polynom g echt kleineren Grades noch nicht einmal $g(\phi)v$ null. Wir bestimmen die Invariantenteiler.

$$X\mathbf{1} - A = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & .... & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & .... & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & .... & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & -1 & X & a_{k-2} \\ 0 & & & 0 & -1 & X + a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Man addiert zuerst das X-fache der letzten Zeile zur vorletzten. Dadurch wird letztere zu $(0, ..., 0, -1, 0, a_{k-2} + a_{k-1}X + X^2)$. Danach addiert man das X-fache dieser Zeile zur drittletzten. Dadurch wird diese zu $(0, ..., 0 - 1, 0, 0, a_{k-3} + a_{k-2}X + a_{k-1}X^2 + X^3$. So fahren wir von unten nach oben fort und erhalten mit (2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & .... & 0 & f(X) & \\ -1 & 0 & 0 & .... & 0 & a_1 + a_2X + ... + X^{k-1} & \\ 0 & -1 & 0 & .... & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & & -1 & 0 & 0 & a_{k-2} + a_{k-1}X \\ 0 & & & 0 & -1 & X + a_{k-1} & \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & f(X) \end{pmatrix}$$

Die Invariantenteiler sind also $1, 1, .., f(X)$, wo $f(X)$ das Minimalpolynom und gleichzeitig das charakteristische Polynom von A ist. Für einen zyklischen Raum stimmen also Minimalpolynom und charakteristisches Polynom überein.

Dies setzen wir zum allgemeinen Fall zusammen: Sei $A \in M_n(K)$ beliebig und

$$X\mathbf{1} - A \sim \begin{pmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n \end{pmatrix}$$

mit $f_1 \mid f_2 .... \mid f_n$ gemäß Satz 41. Wegen $\prod_i f_i = \mid X\mathbf{1} - A| = \chi_A(X)$ sind alle $f_i \neq 0$. Diejenigen, die konstamt sind, werden oE zu 1 gemacht, und nach Änderung der Bezeichnung wird

$$X\mathbf{1} - A \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & f_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & f_r \end{pmatrix}$$

mit $f_1 \mid f_2 .... \mid f_r$ und grad $f_1 \geq 1$ und $f_1 \cdot ... \cdot f_r = \chi_A(X)$. Die Anzahl der Einsen ist $n - r = \sum_{i=1}^r (\text{ grad } (f_i) - 1)$. Jedes f_i können wir mit grad $(f_i) - 1$ Einsen zusammen gruppieren und erhalten durch Umordnen

$$X\mathbf{1} - A \sim \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix} \text{ mit } B_i = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & f_i \end{pmatrix}$$

Jede Teilmatrix B_i gehört zu einem zyklischen Raum mit Minimalpolynom f_i. Aus dem Satz von Frobenius erhalten wir

$$A \approx \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix},$$

wobei die Matrizen $A_i \in M_n(K)$ alle die Gestalt (Z) haben. In Vektorraumsprache:

Satz 43. *Jeder Raum mit Endomorphismus ϕ ist direkte Summe von ϕ-zyklischen Räumen.*

Da A_i das Minimalpolynom f_i hat und alle f_i Teiler von f_m sind, ist f_m das Minimalpolynom von A:

$$m_A = f_m \quad \text{und} \quad \chi_A = f_1 \cdot ... \cdot f_m$$

Von der Bemerkung oben gilt also auch die Umkehrung:

Satz 44. *V ist ϕ-zyklisch genau dann, wenn Minimalpolynom und charakteristisches Polynom von ϕ übereinstimmen.*

Beispiele:

1. Wenn das charakteristische Polynom irreduzibel ist, muß es gleich dem Minimalpolynom sein, weil letzteres stets ein Teiler des ersteren ist. Über $\mathbb{C}$ ist das natürlich nur für $n = 1$ der Fall, über $\mathbb{R}$ aber zum Beispiel für $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, wenn $\alpha \notin \mathbb{Z}\pi$. Das charakteristische Polynom ist $X^2 - 2\cos\alpha\, X + 1$. Nach (Z) ist $A \approx \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{pmatrix}$
2. Jeder Eignwert von A ist auch Nullstelle des Minimalpolynoms von A. Sind die Eigenwerte alle verschieden, so müssen also Minimalpolynom und charakteristisches Polynom übereinstimmen. In der Tat: Ist $\phi v_i = \alpha_i v_i$, so bilden für $v = \sum_i v_i$ die Bilder $v, \phi v = \sum \alpha_i v_i, ..., \phi^{n-1} v = \sum_i \alpha_i^{n-1} v_i$ eine Basis von V, weil die Vandermonde-Determinante (Kap. 11) nicht 0 ist.

15. Jordansche Normalform

Das Ziel ist, einen Vektorraum mit Endomorphismus ϕ in möglichst kleine ϕ-invariante Teilräume zu zerlegen. Das soll in diesem Kapitel geschehen im Falle $K = \mathrm{C}$.

Wir kennen zwei Zerlegungsmethoden:

1. Aus Kap.12: Wenn $F(\phi) = 0$ und $F = g \cdot h$ und g und h teilerfremd, dann ist

$$V = V_f \oplus V_g \text{ mit } V_f = \{x \in V \mid f(\phi)x = 0\}, V_g \text{ entsprechend}$$

2. Aus Kap.14: Jeder Raum ist direkte Summe von zyklischen Räumen.

Das kombinieren wir: Sei ϕ ein Endomorphismus des Vektorraumes V über K.

1. Man zerlegt das Minimalpolynom

$$m_\phi(X) = p_1(X)^{k_1}.....p_r(X)^{k_r},\ p_i(X) \text{ unzerlegbar und verschieden}$$

   Dementsprechend ist

$$V = V_1 \oplus .... \oplus V_r \text{ mit } p_i(\phi)^{k_i} V_i = 0$$

2. Jedes V_i zerlegt man in zyklische Summanden. Diese werden natürlich auch von $p_i(\phi)^{k_i}$ annulliert, möglicherweise sogar von einer kleineren Potenz als der k_i-ten.

Das Ergebnis ist

Satz 45. *Jeder Raum mit Endomorphismus ϕ ist direkte Summe von zyklischen Räumen W_i, auf denen das Minimalpolynom von ϕ Potenz eines unzerlegbaren Polynoms ist (korrekt ausgedrückt: das Minimalpolynom der Einschränkung von ϕ auf W_i).*

Dies alles galt noch über beliebigen Körpern. Jetzt beschränken wir uns auf $K = \mathrm{C}$. Dann haben alle unzerlegbaren Polynome Grad 1. In einem ϕ-zyklischen Raum V mit $m_\phi(X) = (X - \alpha)^k$ wählen wir eine besonders geschickte Basis: Nach Definition von ϕ -zyklisch gibt es einen Vekteo $v \in V$, so daß $v, \phi v, ..., \phi^{k-1}v$ eine Basis von V bilden. Dann bilden auch

$$\begin{array}{ccccccc} v & = & v & & & & \\ (\phi-\alpha)v & = & -\alpha v & + & \phi v & & \\ (\phi-\alpha)^2 v & = & \alpha^2 v & - & 2\alpha\phi v & + & \phi^2 v \\ \vdots & & & & & & \\ (\phi-\alpha)^{k-1}v & = & (-\alpha)^{k-1}v & + & .... & & +\phi^{k-1}v \end{array}$$

eine Basis von V. Wir setzen

$$u_1 = (\phi - \alpha)^{k-1}v, ..., u_{k-1} = (\phi - \alpha)v, u_k = v$$

Dann ist

$$(\phi - \alpha)u_1 = 0, (\phi - \alpha)u_2 = u_1, ..., (\phi - \alpha)u_k = u_{k-1}$$

Bezüglich der Basis $u_1, ..., u_k$ wird ϕ durch die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & .... & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .... & \alpha \end{pmatrix} =: J_\alpha$$

beschrieben.

Definition: Eine Matrix dieser Bauart nennt man ein Jordankästchen.

Satz 45 lautet nun in Matrizensprache

Satz 46. *(Satz über die Jordansche Normalform) Jede Matrix A aus $M_n(\mathrm{C})$ ist ähnlich zu einer Matrix*

$$J = \begin{pmatrix} J_\alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_\mu \end{pmatrix}$$

wobei die $J_\alpha, ..., J_\mu$ Jordankästchen sind.

1. Bemerkung: Die Einträge auf der Diagonalen sind natürlich die Eigenwerte von A.
2. Bemerkung: Kraft Herleitung kann man diese Normalform über jedem Körper herstellen, der die Eigenwerte von A enthält.
3. Bemerkung: Die Sätze aus Kap.14 erlauben abzuzählen, wieviele $\approx$-Typen von Matrizen mit vorgegebenem charakteristischen Polynom es gibt. Man muß zählen, auf wieviele Weisen man $\chi = f_1....f_n$ schreiben kann mit $f_1|....|f_n$. Das kann man für jeden in χ aufgehenden Linearfaktor machen und hinterher alles zusammen multiplizieren.

Beispiel: $\chi_A(X) = (X-\alpha)^4$. Die Möglichkeiten für die Invariantenteiler sind

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = (X-\alpha) = m_A(X)$$
$$f_1 = f_2 = X-\alpha, f_3 = (X-\alpha)^2 = m_A(X)$$
$$f_1 = f_2 = (X-\alpha)^2 = m_A(X)$$
$$f_1 = X-\alpha, f_2 = (X-\alpha)^3 = m_A(X)$$
$$f_1(X) = (X-\alpha)^4 = m_A(X)$$

Dem entsprechen die Normalformen

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Beispiel für Erzeugung der Jordanschen Normalform:

$$\text{Gegeben ist } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X\mathbf{1} - A = \begin{pmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & -1 & X-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & X-1 & 0 \\ X-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & X-1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ X-1 & (X-1)^2 & 0 \\ -1 & -(X-1) & X-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & (X-1)^2 \end{pmatrix}$$

Es gibt zwei zyklische Summanden mit den Minimalpolynomen $X-1$ und $(X-1)^2$. Der einzige Eigenwert ist 1, und die Jordansche Normalform von A ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nutzen der Jordanschen Normalform:

Definition: Eine Folge (Reihe) von Matrizen aus $M_n(\mathrm{C})$ heißt konvergent, wenn alle n^2 Koeffizientenfolgen (-reihen) in C konvergieren.

Lemma 1. *Für jede Matrix $A \in C$ ist die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m$ konvergent.*

Beweis: Sei c eine gemeinsame Schranke für alle n^2 Koeffizienten von A ,d.h. $|a_{ij}| \leq c$ für alle i, j . Sei $a_{ij}^{(k)}$ der Koeffizient Nummer ij von A^k . Dann ist

$$|a_{ij}^{(2)}| = |\sum_{l=1}^{n} a_{il} a_{lj}| \leq nc^2 \text{ und weiter rekursiv } |a_{ij}^{(k)}| = |\sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k-1)} a_{lj}| \leq n^{k-1} c^k$$

Die (für alle reellen c konvergente) Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n} (\frac{(nc)^i}{i!}$ ist eine Majorante aller n^2 Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_{kl}^{(i)}$. Diese Reihen sind also sogar absolut konvergent und zwar gleichmäßig auf jedem Kompaktum.

Definition: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = e^A$.

Außer durch das Vorbild der reellen oder komplexen Exponentialfunktion wird diese Definition gerechtfertigt durch

Lemma 2.

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \textit{ falls } AB = BA$$

Beweis: Aus $AB = BA$ folgt, daß die binomische Formal gilt: $(A + B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$. Damit läuft der Beweis genauso wie für Zahlen statt Matrizen.

Die Behauptung ist ohne die Voraussetzung $AB = BA$ nicht richtig. Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } (A + B)^m = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{wenn } m \text{ gerade} \\ A + B & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere sind die beiden Diagonalglieder der Matrix e^{A+B} einander gleich. Aber

$$e^A = \mathbf{1} + A, \quad e^B = \mathbf{1} + B \text{ also } e^A e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Folgerung aus dem Lemma: Da A mit $-A$ vertauschbar ist, folgt $e^A e^{-A} = e^0 = \mathbf{1}$; das zeigt, daß alle e^A invertierbar sind.

Nun stellen wir uns vor, die Koeffizienten der Matrix A hingen noch differenzierbar von einer reellen Variablen t ab: $a_{ij} = a_{ij}(t)$. Dann bezeichnen wir die Matrix mit den Einträgen $a'_{ij}(t) = \frac{d}{dt} a_{ij}(t)$ kurz mit $A'(t)$ (! ' ist hier also nicht Stürzen !).

Lemma 3.

$$(A + B)' = A' + B' \textit{ und } (AB)' = AB' + A'B$$

Beweis: Die erste Behauptung ist klar. Zur zweiten: AB hat die Koeffizienten $c_{ij} = \sum_l a_{il} b_{lj}$ mit $c'_{ij} = \sum a_{il} b'_{lj} + \sum a'_{il} b_{lj}$. Der Beweis wurde nur hingeschrieben, um sicher zu sein, daß man die richtige Reihenfolge in den Produkten wahrt. Nämlich:

Warnung: I.a. ist *nicht* $(A^m)' = mA^{m-1}A'$, sondern $(A^m)' = (AA....A)' = A'A...A + AA'A...A + ... + A...AA'$. Wenn A mit A' vertauschbar ist, dann ist das dasselbe wie $mA^{m-1}A'$, aber sonst i.a. nicht. Beispiel: $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & f(t) \\ g(t) & 0 \end{pmatrix}$. Man findet $AA' = \begin{pmatrix} fg' & 0 \\ 0 & gf' \end{pmatrix}$ und $A'A = \begin{pmatrix} f'g & 0 \\ 0 & g'f \end{pmatrix}$. Es ist nur dann $AA' = A'A$, wenn $fg = 0$ oder $\frac{f}{g}$ konstant.

Spezialfall: $F(t) = At$ mit einer konstanten Matrix A . Dann ist $F' = A$ mit $F = At$ vertauschbar und $(F^m)' = mF^{m-1}A$

Eine Reihe kann gliedweise differenziert werden, wenn die differenzierte Reihe absolut und auf jedem Kompaktum gleichmäßig konvergiert. Das ist hier der Fall (Lemma 1), und es folgt für $Y(t) := e^{At}$

$$Y'(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}((At)^m)' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} m t^{m-1} A^m = AY(t)$$

Angenommen, man hat noch eine weitere Lösung $U = U(t)$ von $U' = AU$. Nach der Folgerung aus Lemma 2 ist $Y(t)$ invertierbar. Aus $Y^{-1}Y = \mathbf{1}$ folgt $(Y^{-1})'Y + Y^{-1}Y' = 0$. Dies eingesetzt ergibt

$$(Y^{-1}U)' = -Y^{-1}Y'Y^{-1}U + Y^{-1}U' = Y^{-1}AYY^{-1}U + Y^{-1}AU = 0$$

Also ist $Y^{-1}U =: C$ konstant:

Satz 47. *Die matrixwertigen Lösungen $U(t)$ von $U' = AU$ sind genau die $U(t) = Y(t)C$ mit $Y(t) = e^{At}$ und C konstant.*

Anwendung auf Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (gekoppelte Schwingungen):

Gegeben ist eine Matrix $A \in M_n(\mathrm{C})$. Gesucht sind alle Funktionen $z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$ einer reellen Variablen t mit Werten im C^n, welche $z' = Az$ erfüllen. Wir bilden die Matrix Z mit erster Spalte z und Nullspalten sonst. Für diese gilt $Z' = AZ$. Nach Satz 47 gibt es eine konstante Matrix C mit $Z = YC$ (Y aus Satz 47). Dann ist $z = Yc$, wo c die erste Spalte von C ist. Damit ist gezeigt:

Satz 47'. *Die Lösungen z von $z' = Az$ sind genau die $z(t) = Y(t)c$ mit konstanter Spalte c. Dies sind genau die Linearkombinationen der Spalten von Y. M.a.W: Die Lösungen von $z' = Az$ bilden einen n-dimensionalen Vektorraum L, und die Spalten von $Y(t) = e^{At}$ bilden eine Basis von L.*

Preisfrage: Wie berechnet man e^{At} ? Es ist wenig erfolgversprechend, es mit der Definition im Anschluß an Lemma 1 zu versuchen. Aber zum Glück gibt es die Jordansche Normalform: $T^{-1}AT = J$. Aufgrund von $(TJT^{-1})^m = TJT^{-1}TJT^{-1}....TJT^{-1} = TJ^mT^{-1}$ wird

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} TJ^mT^{-1}t^m = Te^{Jt}T^{-1}$$

Statt e^{At} müssen wir also nur e^{Jt} (und allerdings leider T) berechnen. J besteht aus Jordankästchen längs der Diagonalen, und die Berechnung von e^{Jt} geschieht kästchenweise. Ein einzelnes Kästchen sei etwa

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & & \\ 0 & \alpha & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{1} + N$$

Ist J_α k-reihig, so is $N^k = 0$. Da nun zudem $\alpha\mathbf{1}$ mit N vertauschbar ist, erhält man

$$e^{J_\alpha t} = e^{t(\alpha\mathbf{1}+N)} = e^{t\alpha\mathbf{1}}e^{tN}) = e^{\alpha t}(\mathbf{1} + tN + \frac{1}{2}(tN)^2 + ... + \frac{1}{(k-1)!}(tN)^{k-1})$$

$$= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & & & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 & t \\ 0 & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösungen des ursprünglichen Problems $z' = Az$ haben nun alle die Gestalt $z = e^{At}c = Te^{Jt}T^{-1}c$ mit konstanter Spalte c. Mit c durchläuft nun auch $T^{-1}c$ den $\mathbb{C}^n$, so daß man ebenso gut sagen kann:
Die Lösungen z von $z' = Az$ sind genau alle $z = Te^{Jt}b$ mit konstanter Spalte b.

Beispiele:

1. Statt (z_1, z_2, z_3) schreiben wir (x, y, z). Gegeben ist das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & -x & + & y & - & z \\ y' & = & 2x & - & y & + & 2z \\ z' & = & 2x & + & 2y & - & z \end{array}$$

Dazu gehört die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Durch elmentare Umformungen im Polynomring bringen wir $X\mathbf{1} - A$ auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (X-1)(X+1)(X+3) \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind 1,-1 und 3, alle einfach. Also ist

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

T zu finden mit $AT = TJ$ bedeutet die Eigenvektoren zu finden (natürlich sind sie nur bis auf Vielfache bestimmt, aber die Matrix T ist ja auch nicht eindeutig, zum Beispiel kann man sie immer durch BT ersetzen, wo B irgendeine mit A vertauschbare Matrix ist). Man findet auf diese Weise zum Beispiel $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Die Lösungen z sind nun gegeben durch

$$z = Te^{Jt}b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot b$$

mit konstanter Spalte b.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2e^{-3t} \\ -3e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des Lösungsraumes.

2. Gegeben ist das System

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & 8x & + & y \\ y' & = & -4x & + & 4y \end{array}$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A ist $X^2 - 12X + 36 = (X-6)^2$. Folglich ist $J = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.
Durch Lösen von $AT = TJ$ findet man $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ und daraus

$$Te^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & te^{6t} \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix}$$

Eine Basis für den Lösungsraum ist

$$\begin{pmatrix} e^{6t} \\ -2e^{6t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} te^{6t} \\ (1-2t)e^{6t} \end{pmatrix}$$

Zum Schluß noch eine kleine Bemerkung zur Determinante eines "Fundamentalsystems", an der wir die Techniken noch einmal üben können:
Sei A eine Matrix mit konstanten Koeffizienten und $Y(t)$ irgendeine Lösung von $Y' = AY$. Dann ist die Determinante $|Y(t)|$ eine komplexwertige Funktion der reellen Variablen t. Wir berechnen deren Ableitung. Dazu benutzen wir die Definition der Determinante auf S.3 von Kap. 7:

$$|Y|' = (\sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) y_{1\sigma(1)} y_{2\sigma(2)} \cdots\cdots y_{n\sigma(n)})' = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \sum_{i=1}^{n} y_{1\sigma(1)} \cdots y'_{i\sigma(i)} \cdots y_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots\cdots & y_{1n} \\ \vdots & & & \\ y'_{i1} & y'_{i2} & \cdots\cdots & y'_{in} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots\cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

Von diesen Summanden nehmen wir uns der ersten vor und benutzen $Y' = AY$. Dadurch wird dieser zu

$$\begin{vmatrix} a_{11}y_{11} + a_{12}y_{21} + \ldots + a_{1n}y_{n1} & a_{11}y_{12} + a_{12}y_{22} + \ldots + a_{1n}y_{n2} & \ldots\ldots & a_{11}y_{1n} + a_{12}y_{2n} + \ldots + a_{1n}y_{nn} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

Die Determinante ist bei fester 2. bis n-ter Zeile eine lineare Funktion ihrer ersten Zeile. Daher ist die obige Determinante gleich

$$a_{11} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} + \ldots. + a_{1n} \begin{vmatrix} y_{n1} & y_{12} & \cdots & y_{nn} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

Außer der ersten sind hierin alle Determinanten 0, weil sie zwei gleiche Zeilen haben. Es bleibt also nur $a_{11}|Y|$ übrig. Summiert man die ursprüngliche Summe und erinnert sich an $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \text{ sp } A$, so erhält man

$$|Y|' = \text{ sp } A \cdot |Y|$$

Die Theorie im Spezialfall $n = 1$ liefert $|Y(t)| = ce^{t \text{ sp } A}$ mit einer Konstanten c, die sich durch Einsetzen von $t = 0$ als $|Y(0)|$ entpuppt:

$$|Y(t)| = |Y(0)| e^{t \text{ sp } A} \tag{1}$$

Hier erkennt man noch einmal, daß $Y(t)$ entweder für alle t oder für kein t invertierbar ist. Wenn $Y(t)$ invertierbar ist, dann nennt man die Spalten von $Y(t)$ ein Fundamentalsystem und $|Y(t)|$ seine Wronski-Determinante. (1) zeigt, daß man sie bestimmen kann, ohne das Fundamentalsystem zu kennen.

16. Anhang: Die Spinüberlagerung der Gruppe $O_3^+(\mathrm{R})$, Vorlesung vom 23.12.98

In $M_2(\mathrm{C})$ bilden die Matrizen Q der Gestalt $\begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ einen Unterring, wie man leicht nachrechnet. Es gilt

$$|Q| = z\bar{z} + w\bar{w} > 0 \text{ sobald } Q \neq 0$$

Daher sind alle $Q \neq 0$ invertierbar: die von 0 verschiedenen Matrizen Q bilden also eine Gruppe bei Multiplikation. Diese ist allerdings nicht kommutativ: Für

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ und } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ gilt } IJ = -JI$$

Definiton: Ein assoziativer Ring, in dem die von 0 verschiedenen Elemente bei Multiplikation eine Gruppe bilden, heißt Schiefkörper.

Grob gesagt: Dem Schiefkörper fehlt zum Körper nur (möglicherweise) die Kommutativität der Multiplikation.

Für die Adjunkten unserer speziellen Matrizen rechnet man leicht nach

$$\widetilde{PQ} = \tilde{Q}\tilde{P}, \quad Q + \tilde{Q} = (z + \bar{z}) \cdot \mathbf{1}, \quad Q\tilde{Q} = (z\bar{z} + w\bar{w})\mathbf{1}$$

Wir bestimmen das sog. Zentrum Z, definiert durch

$$Z = \{R \mid RQ = QR \text{ für alle } Q\}$$

Mit $R = \begin{pmatrix} u & -v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ bedeutet das die Bedingungen

$$\begin{array}{ccccccccc} uz & - & vw & = & zu & - & \bar{w}\bar{v} \\ -u\bar{w} & - & v\bar{z} & = & -zv & - & \bar{w}\bar{u} \end{array} \quad \text{für alle } z, w \in \mathrm{C}$$

Diese sind nur erfüllt, wenn $v = 0$ und $u = \bar{u}$. Das Zentrum besteht genau aus den reellen Vielfachen der Eins. Die komplexen nicht reellen Vielfachen der Eins gehören gar nicht zum System!

Schreibt man $z = x_0 + ix_1$ und $w = x_2 + ix_3$ mit reellen x_i, so ist

$$Q = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & -x_2 - ix_3 \\ x_2 - ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix} = x_0\,\mathbf{1} + x_1\,I + x_2\,J + x_3\,IJ$$

Die Matrizen $\mathbf{1}$, I, J, IJ bilden eine Basis des Systems über R. Wir vergessen die Herkunft der Q und halten fest: Es gibt einen Schiefkörper H mit folgenden Eigenschaften:

1. H ist ein vierdimensionaler Vektorraum über R. R ist enthalten in H und ist genau das Zentrum von H.
2. H besitzt eine Basis e_0, e_1, e_2, e_3 mit

$$e_0 = 1,\ e_i^2 = -1 \text{ für } i = 1, 2, 3,\ e_1e_2 = e_3 = -e_2e_1$$

3. H trägt eine sogenannte Involution $q \mapsto \bar{q}$ (oben $Q \mapsto \tilde{Q}$) mit

$$\overline{pq} = \bar{q}\bar{p},\ q + \bar{q} = 2x_0,\ q\bar{q} = \sum_{i=0}^{3} x_i^2, \text{ nämlich } \bar{q} = x_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3$$

Definition: H heißt der Schiefköper der Hamiltonschen Quaternionen.

Wir betrachten jetzt gleichzeitig H als vierdimensionalen reellen Vektorraum mit dem Skalarprodukt

$$(p, q) = \sum_{i=0}^{3} x_iy_i = \frac{1}{2}(\sum_i (x_i + y_i)^2 - \sum x_i^2 - \sum_i y_i^2) = \frac{1}{2}((p + q)\overline{(p + q)} - p\bar{p} - q\bar{q}) = \frac{1}{2}(p\bar{q} + q\bar{p})$$

Wir zerlegen

$$\mathrm{H} =< 1 >\perp V \text{ mit } V = \{q \in \mathrm{H} \mid q + \bar{q} = 0\}$$

V ist ein dreidimensionaler reeller Raum mit $q\bar{q} = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$. Wir wollen seine orthogonalen Transformationen mit Hilfe von H beschreiben:

Jede orthogonale Transformation ist Produkt von Spiegelungen (Kap. 9). Seien x und s aus V und $s \neq 0$. Es war $(x, s) = \frac{1}{2}(x\bar{s} + s\bar{x}) = (s, x)$. Daher gilt für die Spiegelung S längs s

$$Sx = x - 2\frac{(x,s)}{(s,s)}s = x - (x\bar{s} + s\bar{x})(s\bar{s})^{-1}s = -sxs^{-1}$$

wobei $s = -\bar{s}$ und $x = -\bar{x}$ benutzt wurde. Jede Drehung (= orthogonale Transformation mit Determinante +1) ist Produkt von zwei Spiegelungen. Daher: Zu jeder Drehung ϕ in V gibt es s und $t \in V$ mit

$$\phi x = STx = S(-txt^{-1}) = stxt^{-1}s^{-1} = q\,x\,q^{-1} \text{ mit } q = st$$

q braucht natürlich nicht in V zu liegen; im Gegenteil: $0 \neq q \in V \Leftrightarrow q = -\bar{q} \Rightarrow q^2 \in \mathrm{R} \Rightarrow \phi^2 = id$. Da q nicht mit allen $x \in V$ vertauschbar ist, ist $\phi \neq id$, der Drehwinkel ist 180.

Umkehrung: Sei $q \in \mathrm{H}$ beliebig $\neq 0$. Dann ist

1. $qVq^{-1} \subset V$; denn

$$qxq^{-1} + \overline{qxq^{-1}} = \frac{1}{(q,q)}(qx\bar{q} + \overline{qx\bar{q}}) = \frac{1}{(q,q)}(qx\bar{q} + q\bar{x}\bar{q}) = q(x + \bar{x})q^{-1}$$

   also =0, wenn $x + \bar{x} = 0$.
2. $x \mapsto qxq^{-1}$ ist R-linear. Das ist klar.
3. $x \mapsto qxq^{-1}$ respektiert das Skalarprodukt; denn

$$2(qxq^{-1}, qyq^{-1}) = qxq^{-1} \cdot \overline{qyq^{-1}} + qyq^{-1} \cdot \overline{qxq^{-1}} = qxq^{-1} \cdot q\bar{y}q^{-1} + qyq^{-1} \cdot q\bar{x}q^{-1} \text{ (siehe Rechung in 1.)}$$

$$= q(x\bar{y} + y\bar{x})q^{-1} = x\bar{y} + y\bar{x} = (x, y), \text{ weil die Klammer mit } q \text{ vertauschbar}$$

Ergebnis: Die Drehungen in V sind genau die Abbildungen $x \mapsto qxq^{-1}$ mit $0 \neq q \in \mathrm{H}$.

Zwei Quaternionen p und q bewirken dieselbe Transformation, wenn $pxp^{-1} = qxq^{-1}$ für alle $x \in V$. Das bedeutet, daß $p^{-1}q$ mit allen $x \in V$ und darum auch mit allen $z \in \mathrm{H}$ vertauschbar ist, also aus R. Zu jedem $q \in \mathrm{H}$ mit $\phi x = qxq^{-1}$ gibt es also unendlich viele weitere, nämlich alle λq mit $0 \neq \lambda \in \mathrm{R}$, die dasselbe leisten. Daher normieren wir die q so, daß $N(q) := q\bar{q} = 1$. Nun gibt es zu jedem ϕ nur noch zwei Quaternionen (mit Norm 1), die ϕ bewirken. Sei U die Gruppe aller Quaternionen mit Norm 1. Die Gruppe aller Drehungen von V, die ja dieselbe ist wie die Gruppe aller dreireihigen orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 (siehe Kap. 9), wird mit $O_3^+(\mathrm{R})$ bezeichnet (manchmal auch mit $SO(3,\mathrm{R})$). Bezeichnet man die Drehung $x \mapsto qxq^{-1}$ mit ϕ_q, hat man eine Abbildung

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & O_3^+(\mathrm{R}) \\ \ni & & \ni \\ q & \mapsto & \phi_q \end{array}$$

Für diese Abbildung gilt

1. Sie ist multiplikativ: $\phi_{pq} = \phi_p\phi_q$. Eine solche Abbildung von einer Gruppe in eine andere nennt man einen Homomorphismus.
2. Zu jedem $\phi \in O_3^+(\mathrm{R})$ gibt es tatsächlich ein Urbild $q \in U$: $\phi = \phi_q$. Eine solche Abbildung nennt man surjektiv.
3. Jedes $\phi \in O_3^+(\mathrm{R})$ hat genau zwei Urbilder in U.

U heißt die Spingruppe, und die Abbildung (1) nenn man auch die Spinüberlagerung der orthogonalen Gruppe. Nach dem eingangs Gesagten ist U dasselbe wie die Gruppe aller zweireihigen komplexen Matrizen der speziellen Gestalt $\begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ mit $z\bar{z}+w\bar{w}=1$. Diese Gruppe wird auch als $SU(2,\mathrm{C})$ (spezielle unitäre Gruppe) bezeichnet.

Man kann natürlich die Drehung ϕ_q, die durch $q = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ bewirkt wird, durch eine Matrix bezüglich der Basis e_1, e_2, e_3 von V beschreiben: A priori ist klar, daß beim Ausmultiplizieren von qe_1q^{-1} alle Terme mit e_i^2 sich wegheben müssen, wir brauchen also nur die gemischten Terme $e_ie_j = \pm e_k$ zu sammeln. Man erhält

$$qe_1q^{-1} = (x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)e_1 + 2(x_0x_3 + x_1x_2)e_2 + 2(x_1x_3 - x_0x_2)e_3$$

Die Koeffizienten von e_1, e_2, e_3 bilden die erste Spalte der Matrix. Die anderen erhält man, indem man konsequent die Indices 1,2,3 sowie die Plätze in der Spalte zyklisch vertauscht. Das Ergebnis ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2(x_2x_1 - x_0x_3) & 2(x_0x_2 - x_3x_1) \\ 2(x_0x_3 + x_1x_2) & x_0^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_1^2 & 2(x_3x_2 - x_0x_1) \\ 2(x_1x_3 - x_0x_2) & 2(x_0x_1 + x_2x_3) & x_0^2 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung von Drehmatrizen durch Quadrupel (x_0, x_1, x_2, x_3) mit $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$ war bereits Euler bekannt. Nach Kap. 9 gilt für den Drehwinkel $\cos\alpha = 2x_0^2 - 1$.