RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Höhere Mathematik für Physiker III

Dr. Jan Swoboda und Dr. Daniele Alessandrini

Heidelberg, 29.01.2016

Übungsblatt 13
Laplace-Gleichung

Die folgenden Aufgaben zählen nicht für die Zulassung zur Prüfung. Abgabe ist nicht nötig.

Aufgabe 1. Lösen Sie die Laplace-Gleichung

$$\Delta u(x,y) = 0$$

für $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$ unter der Randbedingung

$$\begin{cases} u(x,0) = u(x,\pi) = u(0,y) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = \sin(y). \end{cases}$$

Aufgabe 2. Lösen Sie die Laplace Gleichung

$$\Delta u = 0$$

für eine Funktion $u : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, unter der Randbedingung:

$$\begin{cases} u(0,y) = \cos(\pi y) \\ u(1,y) = \cos(7\pi y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \sin(3\pi x) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \sin(2\pi x) \end{cases}$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Green-Funktion für das Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ unter Dirichlet-Randbedingungen.

Aufgabe 4. Sei Ω die Kugel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, und sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ die Funktion $u(x,y) = x^2 + y^2$.

a. Beweisen Sie, dass u eine subharmonische Funktion ist.

b. Bestätigen Sie, dass u den Maximumprinzip erfüllt.

c. Nimmt u ihr Minimum auf dem Rand $\partial\Omega$?

Aufgabe 5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, und sei $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung der Poisson Gleichung

$$\Delta v = C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die Funktion $u = |\nabla v|^2$ subharmonisch ist, und ihr Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ nimmt.

Aufgabe 6. Es sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2, 0 < y < 4 - x^2\}$. Betrachten Sie das Dirichletproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{für } (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = 0 & \text{für } 0 \leq y \leq 4, \\ u(x,0) = 4x & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ u(x, 4-x^2) = x^3 + 4x^2 - 8x & \text{für } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Beweisen Sie für die Lösung u des Problems die Abschätzung

$$\frac{1}{27}(416 - 160\sqrt{10}) < u(x,y) < x(4-y)$$

für alle $(x,y) \in \Omega$. Wenden Sie hierzu das Maximumprinzip auf u sowie auf die Funktion $v(x,y) = x(4-y) - u(x,y)$ an.

Aufgabe 7. Es sei Ω ein beschränktes Gebiet. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen über den kleinsten Eigenwert λ_1 von $-\Delta$.

a. Es seien Neumann-Randbedingungen angenommen. Dann gilt $\lambda_1 = 0$ und der dazugehörige Eigenraum ist eindimensional.

b. Es seien Dirichlet-Randbedingungen angenommen. Dann gilt $\lambda_1 > 0$.

Aufgabe 8 (Physik des Frühstückseis)**.** Denken Sie sich ein Ei als eine homogene Kugel vom Radius π cm. Es wird mit einer Anfangstemperatur von 20° C in einen Topf mit siedendem Wasser gelegt. Wie lange dauert es, bis der Eimittelpunkt eine Temperatur von 50° C erreicht? *Hinweis:* Legen Sie Ihrem Modell die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u$$

zugrunde, wobei Sie als Wärmeleitfähigkeit die Konstante $k = 6 \cdot 10^{-3} \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}}$ annehmen können. Verwenden Sie die Darstellung der Lösung $u(x,t)$ in Form einer Entwicklung nach Eigenfunktionen von $-\Delta$. Näherungsweise genügt es, diese Entwicklung nach dem ersten Term abbrechen zu lassen. Sie benötigen also nur den kleinsten Dirichlet-Eigenwert λ_1 des Eis sowie eine zugehörige normierte Ei(gen)funktion. Letztere finden wir in Form der Besselfunktion

$$J_{\frac{1}{2}}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin(r).$$