RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Höhere Mathematik für Physiker III
Dr. Jan Swoboda und Dr. Daniele Alessandrini
Heidelberg, 22.01.2016

Übungsblatt 12
Laplace-Gleichung
Abgabe bis Freitag, den 29. Januar, 13.00 Uhr

Aufgabe 1. Lösen Sie die Laplace Gleichung

$$\Delta u = 0$$

für eine Funktion $u\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, mit Randbedingungen

$$\begin{cases} u(0,y) = \cos(\pi y), \\ u(1,y) = \cos(7\pi y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Lösen Sie die Laplace Gleichung

$$\Delta u = 0$$

für eine Funktion u auf dem Kreissektor $r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ mit Randbedingungen

$$\begin{cases} u(r,0) = u(r,\frac{\pi}{2}) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) = \sin(\theta)\sin(5\theta). \end{cases}$$

Aufgabe 3. Es bezeichne $A(r,R) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$ den Kreisring mit innerem Radius $r > 0$ und äußerem Radius $R > r$.

a. Bestimmen Sie die Greenfunktion sowie eine Lösungsformel für das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{auf } A(r,R), \\ u = g_1 & \text{für } \|(x,y)\| = r, \\ \partial_r u = g_2 & \text{für } \|(x,y)\| = R \end{cases} \tag{1}$$

zu vorgegebenen Funktionen $f \in C(\overline{A(r,R)})$ und $g_1, g_2 \in C(\partial A(r,R))$. Verwenden Sie hierzu die Darstellungsformel aus Satz 3.4 der Vorlesung.

b. Lösen Sie das Randwertproblem (1) mit $f \equiv 1$ und $g_1 = g_2 \equiv 0$.

Aufgabe 4 (Eigenwertproblem)**.** Betrachten Sie die Eigenwertgleichung

$$-\Delta u = \lambda u$$

für eine Funktion $u\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ unter

(i) Dirichlet-Randbedingungen;

(ii) Neumann-Randbedingungen.

Bestimmen Sie in beiden Fällen das Eigenwertspektrum $\sigma(-\Delta)$ sowie zugehörige Eigenfunktionen.

Aufgabe 5 (Gravitationspotential der homogenen Vollkugel)**.** Es sei $R > 0$ und $C > 0$ eine Konstante. Bestimmen Sie eine stetig differenzierbare Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = \begin{cases} C & \text{für } \|x\| \leq R, \\ 0 & \text{für } \|x\| > R \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}^3$ mit $\lim_{\|x\| \to \infty} u(x) = 0$. Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Lösung.