RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Höhere Mathematik für Physiker III

Dr. Jan Swoboda und Dr. Daniele Alessandrini

Heidelberg, 15.1.2015

Übungsblatt 11

Distributionen

Abgabe bis Freitag, den 22. Januar, 13.00 Uhr

Aufgabe 1. Betrachten Sie die folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$xy' = 0$$

für eine Funktion $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die Heaviside-Funktion eine schwache Lösung, aber keine klassische Lösung ist.

Aufgabe 2. Seien $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$. Betrachten Sie k Funktionen $f_i \in C^2([a_{i-1}, a_i])$, $1 \leq i \leq k$, und sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = f_i(x) \qquad \text{falls } x \in (a_{i-1}, a_i)$$

definiert. Für $x = a_i$ definieren wir $f(a_i) = 0$.

a. Berechnen Sie $\partial_x f \in \mathcal{D}'$.

b. Berechnen Sie $\partial_x^2 f \in \mathcal{D}'$.

c. Wann ist $\partial_x f$ einer Funktion in L^1_{loc} zugeordnet?

d. Wann ist $\partial_x^2 f$ einer Funktion in L^1_{loc} zugeordnet?

Aufgabe 3. Zeigen Sie durch die Angabe eines geeigneten Beispiels, dass der Raum $\mathcal{S}'$ der temperierten Distributionen ein echter Teilraum von $\mathcal{D}'$ ist.

Aufgabe 4. Für jede Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei F_h die der Funktion h zugeordnete Distribution. Beweisen Sie für die folgende Funktionen h, dass F_h eine temperierte Distribution ist, und berechnen Sie die Fouriertransformierte der Distribution F_h:

a. $h(x) = 1$.

b. $h(x) = e^{ix}$.

c. $h(x) = \cos(x)$.

d. $h(x) = \sin(x)$.

e. $h(x) = x^n$.

f. $h(x) = \cos(x^2)$.

g. $h(x) = \sin(x^2)$.

Die folgenden Aufgaben werden in der Zentralübung besprochen werden und zählen nicht für die Zulassung zur Prüfung.

Aufgabe 5 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** Es sei $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: Gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)u(x)dx = 0$$

für jede Testfunktion $u \in D$, so ist $h = 0$ fast überall.