RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Höhere Mathematik für Physiker III
Dr. Jan Swoboda und Dr. Daniele Alessandrini
Heidelberg, 18.12.2015

Übungsblatt 10
Weinachtsübungszettel
Abgabe bis Freitag, den 15. Januar, 13.00 Uhr

Die Aufgaben auf diesem Übungsblatt dienen der Wiederholung des Vorlesungsstoffs und zählen nicht zur Klausurzulassung. Die von Ihnen erzielten Punkte sind „Bonuspunkte“, die wir zu Ihrem bisherigen Punktestand addieren werden.

Aufgabe 1. Man löse das lineare System von Differentialgleichungen

$$\begin{cases} f' &= f+g, \\ g' &= -2f+3g \end{cases}$$

unter der Anfangsbedingung

$$\begin{cases} f(0) &= 1, \\ g(0) &= 2. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Eine radioaktive Substanz R zerfällt in eine zweite, ebenfalls radioaktive Substanz S. Seien r, s die Massen der Substanzen R und S zur Zeit t.

a. Zeigen Sie, dass dieses physicalische Problem durch folgendes Differentialgleichungssystem modeliert wird:
$$x' = Ax,$$
wo $A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ a & -b \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

b. Lösen Sie das System.

c. Bestimmen Sie die Massen zur Zeit t, wenn am Anfang nur die Substanz R mit Masse r_0 vorliegt.

Aufgabe 3. Sei f eine 2π-periodische Funktion durch $f(x) = x$ für $0 < x < 2\pi$ und $f(0) = \pi$ gegeben.

a. Zeigen Sie, dass
$$f(x) = \pi - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b. Folgern Sie die Leibnizsche Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 4. Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 \le x \le \pi, t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \sin(x)\cos(4x), & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Aufgabe 5. Lösen Sie die Gleichung $\Delta u = 0$ auf dem Kreisring $1 < r < 2$, mit Randwertbedingungen

$$u(1,\theta) = 0,$$

$$u(2,\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2},$$

mit $-\pi < \theta \le \pi$.

Aufgabe 6. Sei $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise fremder Mengen aus $\mathcal{B}^d$, so dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R}^d$. Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass, die Funktion f, durch

$$f(x) = f_n(x) \qquad \text{falls } x \in E_n$$

definiert, messbar ist.

Aufgabe 7. Finden Sie mit Hilfe der Fouriertransformation eine Lösung u der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

zu den Anfangsbedingungen $u(x,0) = f(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f'(x)$ mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Start ins Neue Jahr!