RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Höhere Mathematik für Physiker III
Dr. Jan Swoboda und Dr. Daniele Alessandrini
Heidelberg, 11.12.2015

Übungsblatt 9
Fouriertransformation
Abgabe bis Freitag, den 18. Dezember, 13.00 Uhr

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Fouriertransformierte der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$:

a. $f(x) = \mathbb{1}_{[-2,-1]\cup[0,1]}(x)$.

b. $f(x) = \max(1 - |x|, 0)$.

c. $f(x) = e^{-x}\sin(x)\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$.

d. $f(x) = e^{ix}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

e. $f(x) = (1 + |x|)e^{-|x|}$.

f. $f(x_1, x_2) = e^{-|x_1+x_2|}\sin(x_1 - x_2)$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie mittels der Fouriertransformation eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der gewönlichen Differentialgleichung

$$y'' - y = e^{-|x|}.$$

Aufgabe 3 (Eindimensionale Wellengleichung)**.** Es sei $\omega > 0$ eine Konstante. Finden Sie mit Hilfe der Fouriertransformation eine formale Lösung u der Wellengleichung

$$\omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

zu den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = f(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ mit hinreichend regulären Funktionen f, g. (Es wird nicht verlangt nachzuweisen, dass die von Ihnen gefundene Funktion u die erforderlichen Differenzierbarkeitseigenschaften besitzt). Skizzieren Sie (für $\omega = 1$) den Graphen von u im Falle der Anfangsbedingungen $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ und $g = 0$.

Die folgenden Aufgaben werden in der Zentralübung besprochen werden und zählen nicht für die Zulassung zur Prüfung.

Aufgabe 4. Finden Sie mit Hilfe der Fouriertransformation eine Lösung u der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung mit Quelle

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + F(x)$$

zu den Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$, mit Funktionen

$$f(x) = e^{-x^2},$$

$$F(x) = e^{-x^2}(2 - 4x^2) - e^{-x^2/4}(x^2 - 2).$$