RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Höhere Mathematik für Physiker III
Dr. Jan Swoboda und Dr. Daniele Alessandrini
Heidelberg, 4.12.2015

Übungsblatt 8
Lebesgue-Integral
Abgabe bis Freitag, den 11. Dezember, 13.00 Uhr

Aufgabe 1. Man betrachte die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass das uneigentliche Riemann-Integral von f existiert und endlich ist, aber f nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Zeigen Sie, dass:

a. f nicht Lebesgue-integrierbar ist. (Hinweis: Zu $k \in \mathbb{N}$, betrachte das Dreieck Δ_k mit Ecken $(2\pi k, 0)$, $\left((2k+\frac{1}{2})\pi, \frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi}\right)$, $((2k+1)\pi, 0)$. Welches Maß hat Δ_k?)

b. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \, dy = \frac{\sin x}{x}$.

c. $\displaystyle\int_0^n \int_0^\infty \left|e^{-xy} \sin x\right| \, dy \, dx \leq n$.

d. $\displaystyle\int_0^n \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_0^\infty \left(\int_0^n e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy$.

e. $\displaystyle\int_0^n e^{-xy} \sin x \, dx = \frac{-y e^{-ny} \sin n - e^{-ny} \cos n}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2}$.

f. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^n f(x) \, dx = \pi$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

Hinweis:

a. Für jedes $y > 0$, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} \, dt = \int_0^\infty y e^{-x^2 y^2} \, dx$.

b. $\displaystyle\left(\int_0^\infty e^{-t^2} \, dt \right)^2 = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty y e^{-y^2(1+x^2)} \, dx \right) dy$.

c. $\displaystyle\left(\int_0^\infty e^{-t^2} \, dt \right)^2 = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty y e^{-y^2(1+x^2)} \, dy \right) dx$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2}\,dx = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-1)\sqrt{2\pi}$$

für jedes gerade n (Im Fall $n = 0$ ist das Produkt $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)$ als 1 definiert).

Hinweis: Wir beweisen

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-tx^2/2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-1)}{t^{n/2}}\sqrt{\frac{2\pi}{t}}.$$

a. Im Fall $n = 0$, benutzen Sie Aufgabe 2.

b. Per Induktion nach n folgt $\int_{-\infty}^{\infty} x^{n-2} e^{-tx^2/2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-3)}{t^{(n-2)/2}}\sqrt{\frac{2\pi}{t}}$.

c. Differenzieren Sie unter dem Integral und begründen Sie, weshalb dieser Schritt hier erlaubt ist.

Die folgenden Aufgaben werden in der Zentralübung besprochen werden und zählen nicht für die Zulassung zur Prüfung.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine Funktion. Sei $H(f)$ der Hypograph von f, d.h. die Menge

$$\{(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 < y < f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

a. Zeigen Sie, dass f messbar ist genau dann, wenn $H(f)$ ein Borel-Menge ist.

b. Zeigen Sie, dass $\int f\,d\lambda^n = \lambda^{n+1}(H(f))$.

c. Zeigen Sie, dass der Graph von f eine Borel-Menge ist.

d. Zeigen Sie, dass der Graph von f eine Nullmenge ist.