RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Höhere Mathematik für Physiker III
Dr. Jan Swoboda und Dr. Daniele Alessandrini
Heidelberg, 27.11.2015

Übungsblatt 7
Lebesgue-Integral
Abgabe bis Freitag, den 4. Dezember, 13.00 Uhr

Aufgabe 1. Man kennzeichne diejenigen Elementarfunktionen $f \in E$, welche Lebesgue-integrierbar sind (im Sinne von Definition 2.44).

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass das Lebesgue-Integral eine Abbildung $E \to \bar{\mathbb{R}}^+$ mit den folgenden Eigenschaften ist:

a. $\int \mathbb{1}_A \, d\lambda = \lambda^n(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}^n$;

b. $\int \alpha f \, d\lambda = \alpha \int f \, d\lambda$ für alle $f \in E$ und $\alpha \geq 0$;

c. $\int (f+g) \, d\lambda = \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda$ für alle $f, g \in E$;

d. $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\lambda \leq \int g \, d\lambda$ für alle $f, g \in E$.

Aufgabe 3. Es sei $1 \leq p < q \leq \infty$.

a. Zeigen Sie durch Angabe je eines Gegenbeispiels, dass weder die Inklusion $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq L^q(\mathbb{R}^n)$ noch die Inklusion $L^q(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt.

b. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so, dass für ein $r > 0$ $\{f \neq 0\} \subset \mathcal{B}_0(r)$, der Ball mit Radius r um $x = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, falls $f \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$.

c. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass dann $f \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, falls $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 4. Es sei (A_i) eine Folge paarweise fremder Mengen aus $\mathcal{B}^n$ mit Vereinigung $A \in \mathcal{B}^n$, und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\{f \neq 0\} \subset A$. Man zeige: f ist genau dann integrierbar, wenn für jedes i die Funktion $f \mathbb{1}_{A_i}$ integrierbar ist, und die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int |f| \mathbb{1}_{A_i} d\lambda$$

konvergiert.

Aufgabe 5. Sei (f_i) eine Folge mit $f_i \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\{f_i \neq 0\} \subset [0,1]$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der gleichmäsige Grenzwert der Folge (f_n). Zeigen Sie dass $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Die folgenden Aufgaben werden in der Zentralübung besprochen werden und zählen nicht für die Zulassung zur Prüfung.

Aufgabe 6. Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass f die folgende „Stetigkeitseigenschaft“ besizt: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für jede Menge $E \in \mathcal{B}^n$ mit $\lambda^n(E) < \delta$ gilt:

$$\int |f| \mathbb{1}_E d\lambda < \varepsilon.$$