RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Höhere Mathematik für Physiker III
Dr. Jan Swoboda und Dr. Daniele Alessandrini
Heidelberg, 20.11.2015

Übungsblatt 6
Messbare Funktionen
Abgabe bis Freitag, den 27. November, 13.00 Uhr

Aufgabe 1. Wir nennen eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ vernachlässigbar, wenn es eine Borel-Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \subset B$ und $\lambda^n(B) = 0$ gibt. Sei $\mathcal{L}$ die von den Borel-Mengen und den vernachlässigbaren Mengen erzeugte σ-Algebra.

1. Zeigen Sie, dass $A \in \mathcal{L}$ genau dann, wenn eine Borel-Menge B existiert, so dass $A \subset B$ und $B \setminus A$ vernachlässigbar ist.
2. Zeigen Sie, dass $A \in \mathcal{L}$ genau dann, wenn es eine Borel-Menge B gibt, so dass $B \subset A$ und $A \setminus B$ vernachlässigbar ist.
3. Zeigen Sie, dass sich das Lebesgue-Maß $\lambda^n : \mathcal{B}^n \to [0, \infty]$ zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{L}$ erweitern lässt.

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe soll die Existenz einer nicht-borelschen Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ gezeigt werden. Hierzu betrachten wir die Untergruppe $\mathbb{Q}^n$ von $\mathbb{R}^n$. Auf $\mathbb{R}^n$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}^n.$$

(D.h. die Äquivalenzklassen sind die Nebenklassen von $\mathbb{R}^n$ modulo $\mathbb{Q}^n$).

a. Man beweise, dass jede Äquivalenzklasse $x + \mathbb{Q}^n$ einen Repräsentanten in $[0, 1)^n$ besitzt.

b. Es sei $K \subseteq [0, 1)^n$ so gewählt, dass K mit jeder Äquivalenzklasse genau ein Element gemeinsam hat. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in K} (k + \mathbb{Q}^n) = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}^n} (K + y)$$

und für $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}^n$, $y_1 \neq y_2$,

$$(K + y_1) \cap (K + y_2) = \emptyset.$$

c. Nehmen Sie nun an, dass die Menge K eine Borel-Menge ist. Schließen Sie hieraus:

$$\sum_{y \in \mathbb{Q}^n} \lambda^n(K + y) = \lambda^n(\mathbb{R}^n) = \infty.$$

d. $\lambda^n(K + y) = \lambda^n(K)$.

e. $\lambda^n(K) > 0$.

f.

$$\bigcup_{y\in[0,1)^n\cap\mathbb{Q}^n} (K+y) \subseteq [0,2)^n.$$

g.

$$\sum_{y\in[0,1)^n\cap\mathbb{Q}^n} \lambda^n(K+y) \leq \lambda^n([0,2)^n) = 2^n.$$

h. Folgern Sie, dass im Widerspruch zu (e) $\lambda^n(K) = 0$ gelten muss, und damit K nicht in $\mathcal{B}^n$ enthalten sein kann.

Aufgabe 3. Man finde eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, die nicht messbar ist.

Aufgabe 4. Man zeige: Gleichwertig mit der Messbarkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ ist jede der folgenden Eigenschaften:

i. $\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{B}^n$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$;

ii. $\{f > \alpha\} \in \mathcal{B}^n$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$;

iii. $\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{B}^n$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$;

iv. $\{f < \alpha\} \in \mathcal{B}^n$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar ist.

Die folgenden Aufgaben werden in der Zentralübung besprochen werden und zählen nicht für die Zulassung zur Prüfung.

Aufgabe 6 (Littlewoods erstes Prinzip)**.** Sei $E \subset \mathbb{R}$ eine messbare Menge mit $\lambda(E) < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Finden Sie disjunkte Intervalle $I_1, \ldots, I_k \subset \mathbb{R}$, so dass

$$\lambda\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} I_k\right) < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{k} I_k \setminus E\right) < \varepsilon.$$

Aufgabe 7 (Littlewoods zweites Prinzip)**.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion und $\varepsilon > 0$. Finden Sie eine stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\lambda\left(\{x \in \mathbb{R} \mid |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}\right) < \varepsilon.$$