RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Höhere Mathematik für Physiker III
Dr. Jan Swoboda und Dr. Daniele Alessandrini
Heidelberg, 13.11.2015

Übungsblatt 5

Harmonische Funktionen und σ-Algebren

Abgabe bis Freitag, den 20. November, 13.00 Uhr

Aufgabe 1 (Mittelwerteigenschaft der harmonischen Funktionen)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ offen and $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige harmonische Funktion. Zu $x \in \Omega$ sei $r > 0$ so gewählt, dass der abgeschlossene Ball vom Radius $r > 0$ in Ω enthalten ist. Verwenden Sie die Poissonsche Integralformel auf $\mathbb{D}$ um zu zeigen, dass u die Mittelwerteigenschaft

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + re^{i\varphi})d\varphi = u(x)$$

besitzt.

Aufgabe 2 (Eigenschaften des Poisson-Kerns)**.** Es bezeichne

$$P(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi)}$$

den Poisson-Kern.

a. Man zeige für $v = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ und $w = (\cos(\psi), \sin(\psi))$ die Identität

$$P(r,\varphi-\psi) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-\|v\|^2}{\|v-w\|^2}$$

b. Man zeige, dass P auf $\mathbb{D}$ harmonisch ist, $\Delta P = 0$.

c. Zeigen Sie, dass P keine stetige Fortsetzung auf die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ besitzt.

Aufgabe 3. Es bezeichne $\mathbb{D}$ die Einheitskreisscheibe, die wir mit Polarkoordinaten (r,φ) versehen. Auf $\mathbb{D}$ betrachten wir das Neumannsche Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{D}, \\ \frac{\partial u}{\partial r}|_{\partial\mathbb{D}} = f \end{cases}$$

zu gegebener Funktion $f \in C^0(\partial\mathbb{D})$.

a. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})d\varphi = 0$$

eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Neumannschen Randwertproblems darstellt, indem Sie die formale Reihendarstellung einer auf $\mathbb{D}$ harmonischen Funktion u betrachten.

b. Die Funktion $f \in C^0(\partial\mathbb{D})$ erfülle die Bedingung in Punkt (a). Finden Sie eine formale Lösung des Randwertproblems in Form einer Reihe sowie als Faltungsintegral.

c. Wie lautet der dazugehörige Faltungskern?

Aufgabe 4.

a. Es sei X eine nichtleere Menge und $0 \neq E \subseteq X$. Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ über X zeige man, dass das System der Teilmengen

$$\{A \cap E \mid A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra über E ist.

b. Seien X, Y nichtleere Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Y zeige man, dass das System der Mengen

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra über X ist.

Aufgabe 5. Es bezeichne I_r die Menge der abgeschlossenen Intervalle in $\mathbb{R}$ mit rationalen Endpunkten. Zeigen Sie, dass die von I_r erzeugte σ-Algebra mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ übereinstimmt.

Aufgabe 6. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{E}_n$ das System der Mengen

$$\mathcal{E}_n = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots, \{n\}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Sei $\mathcal{A}_n$ die von $\mathcal{E}_n$ erzeugnete σ-Algebra. Man zeige:

a. $\mathcal{A}_n = \{A \subset \mathbb{N} \mid \text{ entweder } A \subset \{1, \ldots, n\} \text{ oder } \{1, \ldots, n\}^C \subset A\}$

b. $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$.

c. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ ist keine σ-Algebra.

Die folgenden Aufgaben werden in der Zentralübung besprochen werden und zählen nicht für die Zulassung zur Prüfung.

Aufgabe 7. Der Laplace-Operator Δ auf $\mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

für C^2-Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Wir führen Kugelkoordinaten ein: den Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und die Winkelkoordinaten θ (Polarwinkel) und φ (Azimutwinkel) gegeben durch $\theta = \arccos(z/r)$ und $\varphi = \arctan(y/x)$, wobei $x > 0$, $\varphi = \arctan(y/x) + \pi$ if $x < 0$, $\varphi \pm \pi/2$ if $x = 0$. Mit dieser Definition ist $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [-\pi/2, 3\pi/2)$.

a. Bestimmen Sie die Umkehrung der Koordiantentransformation

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi,$$

$$z = r \cos\theta.$$

b. Beweisen Sie, dass der Laplace-Operator auf R^3 in Kugelkoordinaten durch die Formel

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

gegeben ist.