RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Höhere Mathematik für Physiker III
Dr. Jan Swoboda und Dr. Daniele Alessandrini
Heidelberg, 6.11.2015

Übungsblatt 4
Fourierreihen
Abgabe bis Freitag, den 13. November, 13.00 Uhr

Aufgabe 1 (Eigenschaften der Faltung)**.** Man beweise die folgenden Eigenschaften der Faltung für Funktionen $f, g, h \in C^0(\mathbb{T})$.

a. $f * g = g * f$.

b. $(f * g) * h = f * (g * h)$.

c. $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Aufgabe 2 (Eulersche Identitäten)**.** Geben sei die durch $f(x) = x^2$ für $x \in [-1, 1]$ definierte 2-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a. Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f.

b. Beweisen Sie die Identität
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
(Hinweis: Werten Sie die Fourierreihe bei $x = 1$ aus.)

c. Bestimmen Sie den Wert der Reihe:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$
(Hinweis: Werten Sie die Fourierreihe für ein weiteres $x \in \mathbb{R}$ aus.)

d. Berechnen Sie
$$\sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n^2}.$$

e. Berechnen Sie
$$\sum_{n \text{ gerade}} \frac{1}{n^2}.$$

Aufgabe 3. Man beweise die Parsevalsche Gleichung.
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}$$
für alle $f, g \in L^2(\mathbb{T})$.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

für einen an beiden Enden isolierten Draht der Länge $L = 2\pi$, d.h. es gelten die Neumannschen Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

für alle $t > 0$.

a. Bestimmen Sie alle Lösungen in Produktform

$$u(x,t) = v(x)w(t)$$

dieses Randwertproblems.

b. Betrachten Sie das Anfangsrandwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung zur Anfangsbedingung

$$u(x,0) = u_0(x)$$

für $0 \leq x \leq L$ mit $u_0 \in PC^1([0,L])$. Finden Sie eine formale Lösung in Form einer Fourierreihe.

c. Schreiben Sie Ihre Lösung u aus (b) in Form eines Faltungsintegrals mit geeigneter Kernfunktion $K(x,t)$.

Die folgenden Aufgaben werden in der Zentralübung besprochen werden und zählen nicht für die Zulassung zur Prüfung.

Aufgabe 5 (Wärmeleitung in das Erdinnere)**.** Der jahreszeitliche Verlauf der Erdtemperatur $u = u(x,t)$ (zur Zeit t, in der Tiefe x unterhalb der Erdoberfläche) genügt näherungsweise der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

für eine Konstante $k > 0$. Wir legen die folgende Randbedingungen zu Grunde:

- Periodische Temperaturschwankungen an der Erdoberfläche mit Periodenlänge $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$, d.h. $u(0,t) = \cos(\omega t)$.
- Die Temperatur weit im Erdinneren soll beschränkt bleiben. Idealisierte Annahme: $u(x,t)$ ist beschränkt für $x \to \infty$.

a. Finden Sie mittels des Produktansatzes $u(x,t) = v(x)w(t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung unter den vorgegebenen Randbedingungen.

b. Es sei $T = 1$ Jahr und $k = 2 \cdot 10^{-7} \frac{m^2}{s}$. In welcher Tiefe ergibt sich eine Phasenverschiebung von einem halben Jahr?