RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Höhere Mathematik für Physiker III

Dr. Jan Swoboda und Dr. Daniele Alessandrini

Heidelberg, 30.10.2015

Übungsblatt 3

Fourierreihen

Abgabe bis Freitag, den 6. November, 13.00 Uhr

Aufgabe 1 (Eigenschaften der Fourierkoeffizienten)**.** Seien $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ komplexwertige Funktionen. Man beweise die folgenden Aussagen über deren Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k)$ und $\hat{g}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

a. $\widehat{f+g}(k) = \hat{f}(k) + \hat{g}(k)$.

b. $\widehat{\lambda f}(k) = \lambda \hat{f}(k)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

c. $\widehat{\bar{f}}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}$.

d. Für $y \in \mathbb{T}$ bezeichne $\tau^y(f) \in L^1(\mathbb{T})$ die Funktion $\tau^y(f)(x) = f(x-y)$. Dann gilt $\widehat{\tau^y(f)}(k) = e^{-iky}\hat{f}(k)$.

e. Es sei $e_m(x) = e^{imx}$, $m \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\widehat{e_m f}(k) = \hat{f}(k-m)$.

f. $2\pi \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\, dx$.

g. $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(k)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$.

h. $\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$. (Ohne Beweis darf angenommen werden, dass die Reihenfolge der Integration bei den auftretenden Doppelintegralen vertauscht werden darf).

i. $\widehat{\partial_x f}(k) = ik\hat{f}(k)$, falls $f \in C^1(\mathbb{T})$.

Aufgabe 2. Man beweise die Inklusionen

$$C^0(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T}).$$

Zeigen Sie anhand jeweils eines Beispiels, dass die Inklusionen nicht strikt sind.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Fourierreihen in reeller und komplexer Form der 2π-periodischen Funktionen f, die gegeben sind durch

a. $f(x) = 0$ für $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 1$ für $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}$.

b. $f(x) = \pi - |x|$ für $[-\pi, \pi)$.

c. $f(x) = x^2$ für $0 < x < 2\pi$, $f(0) = 2\pi^2$.

d. $f(x) = x^4$ für $0 < x < 2\pi$, $f(0) = 8\pi^4$.

Aufgabe 4. Für eine an den Enden $x = 0$ und $x = \pi$ eingespannte Saite der Länge $L = \pi$ löse man die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

zu den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \sin(2x) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 3\sin(5x).$$

Die folgenden Aufgaben werden in der Zentralübung besprochen werden und zählen nicht für die Zulassung zur Prüfung.

In den folgenden Aufgaben werden zwei Versionen des Spektralsatzes bewiesen. Hierzu benötigen wir die folgenden Definitionen: Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt **hermitesch**, falls für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}}.$$

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **symmetrisch**, falls für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Aufgabe 5. Es sei A eine hermitesche Matrix (bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{C}^n$). Zeigen Sie, dass A, dargestellt als Matrix bezüglich einer weiteren unitären Basis, ebenfalls hermitesch ist. Beweisen Sie eine analoge Aussage für symmetrische Matrizen.

Aufgabe 6 (Spektralsatz für komplexe Matrizen)**.** Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix.

a. Man beweise, dass A mindestens einen Eigenvektor besitzt.

b. Zeigen Sie: Ist v Eigenvektor von A, so ist der Unterraum $v^\perp$ A-invariant, d.h. es gilt:

$$w \in v^\perp \quad \Longrightarrow \quad Aw \in v^\perp.$$

c. Zeigen Sie, dass es eine unitäre Basis gibt, bezüglich der A diagonal ist. (Hinweis: Induktion über die Dimension des Vektorraums. Betrachte einen Eigenvektor und dessen orthogonales Komplement).

d. Beweisen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sind.

Aufgabe 7 (Spektralsatz für reelle Matrizen)**.** Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Beweisen Sie, dass eine orthogonale Basis existiert, bezüglich der A diagonal ist, und dass alle Eigenwerte von A reell sind.