RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

MATHEMATISCHES INSTITUT

Vorlesung Höhere Mathematik für Physiker III
Dr. Jan Swoboda und Dr. Daniele Alessandrini
Heidelberg, 23.10.2013

Übungsblatt 2
Gewöhnliche Differentialgleichungen und Lipschitz-Stetigkeit
Abgabe bis Freitag, den 30. Oktober, 13.00 Uhr

Aufgabe 1. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$2t^2y'' + ty' - 3y = 0$$

a. Man reduziere die Gleichung auf ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung.

b. Man beweise: Die Funktionen

$$y_1(t) = t^{-1}, \qquad\qquad y_2(t) = t^{\frac{3}{2}}$$

bilden ein Fundamentalsystem auf dem Intervall $[1, 3]$.

c. Geben Sie eine Fundamentalmatrix des Systems an.

d. Lösen Sie das Anfangswertproblem zu den Anfangswerten:

$$y(1) = 1, \qquad y'(1) = 2.$$

Aufgabe 2. Es sei $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

die Lösungen

$$y(t) = y_0 e^{\int_0^t A(x)\,dx}$$

mit $y_0 \in \mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 3. Man beweise die folgenden Aussagen über die Funktionen $f, g\colon I = [0, 1] \to \mathbb{R}$ bzw. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nur Teilaufgaben c–e):

a. Sind f, g Lipschitz-stetig, so ist auch das Produkt fg Lipschitz-stetig.

b. If $f \in C^1(I, \mathbb{R})$, so ist f Lipschitz-stetig.

c. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist Lipschitz-stetig aber nicht differenzierbar.

d. Die Funktion $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin(\frac{1}{x})$, falls $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und $f(0) = 0$ ist differenzierbar aber nicht lokal Lipschitz-stetig.

e. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist lokal Lipschitz-stetig aber nicht Lipschitz-stetig.

f. Die Funktion $f(x) = \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ ist nicht lokal Lipschitz-stetig.

Aufgabe 4. Zeigen Sie für jede der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen, dass die angegebene Funktion y eine Lösung zum Anfangswert $y(0) = 0$ ist. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um die einzige Lösung des Anfangswertproblems handelt.

a. $y' = y^2$, $y(t) = 0$.

b. $y' = \sqrt{y}$, $y(t) = \frac{1}{4}t^2$.

c. $y' = y^{\frac{2}{3}}, y(t) = \frac{1}{27}t^3$.

Die folgenden Aufgaben werden in der Zentralübung besprochen werden und zählen nicht für die Zulassung zur Prüfung.

Die folgenden Übungen sind zur Vorbereitung des Beweises des Spektralsatzes (für lineare Abbildungen $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$) auf dem nächsten Übungsblatt konzipiert. Für Vektoren $v, w \in \mathbb{C}^n$ erklären wir das **hermitesche Skalarprodukt** als

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i w_i.$$

Für Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ definieren wir das **euklidische Skalarprodukt** durch

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt **unitär**, falls für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle .$$

Analog nennen wir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **orthogonal**, falls

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit

$$\mathbf{U}(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A \text{ unitär}\} \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$$

die Gruppe der **unitären** $n \times n$-Matrizen, und analog mit $\mathbf{O}(n) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ die Gruppe der **orthogonalen** $n \times n$-Matrizen .

Zwei Vektoren v, w aus $\mathbb{C}^n$ oder $\mathbb{R}^n$ nennen wir **orthogonal**, falls $\langle v, w \rangle = 0$. Das **orthogonale Komplement** eines Untervektorraums $V \subseteq \mathbb{C}^n$ ist der Unterraum

$$V^\perp := \{v \in \mathbb{C}^n \mid \langle v, w \rangle = 0 \;\forall w \in V\}.$$

(Analog erklären wir $V^\perp$ für eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$ und $v^\perp$ für einen Vektor $v \in \mathbb{C}^n$). Ist $V \subset \mathbb{C}^n$ ein Untervektorraum, so nennen wir eine Basis $e_1, \ldots, e_m$ von V **unitär**, falls $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt. Analog wird eine Basis $e_1, \ldots, e_m$ von $V \subset \mathbb{R}^n$ **orthogonal** genannt, falls $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Aufgabe 5 (Unitäre und orthogonale Gruppen)**.** Man beweise die folgenden Aussagen.

a. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist unitär genau dann, wenn $\bar{A}^T A = \mathrm{Id}$.

b. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal genau dann, wenn $A^T A = \mathrm{Id}$.

c. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist unitär genau dann, wenn die Spalten von A eine unitäre Basis bilden.

d. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal genau dann, wenn die Spalten von A eine orthogonale Basis bilden.

e. Das Produkt zweier unitärer Matrizen ist unitär, ebenso die Inverse einer unitären Matrix. Beweisen Sie die analoge Aussage für orhogonale Matrizen. (Dies zeigt, dass es sich bei $\mathbf{U}(n)$ und $\mathbf{O}(n)$ um Gruppen handelt, wobei die Gruppenmultiplikation durch das Matrixprodukt gegeben ist).

Aufgabe 6 (Unitäre und orthonormale Basen)**.** Man beweise die folgenden Aussagen.

a. Für jeden Vektor v in $\mathbb{C}^n$ (oder $\mathbb{R}^n$) ist die Abbildung

$$w \mapsto \langle v, w \rangle$$

linear mit Kern $v^\perp$.

b. Jeder Unterraum $V \subset \mathbb{C}^n$ besitzt eine unitäre Basis, und jeder Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ besitzt eine orthonormale Basis. (Hinweis: Induktion über die Dimension von V. Wähle einen Vektor v und betrachte dessen orthogonales Komplement.)

c. Jede unitäre oder orthogonale Basis eines Unterraums kann zu einer unitären oder orthogonalen Basis von $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n$ verlängert werden.