



## ÜBUNGSBLATT 1

**Exponentialreihen und gewöhnliche lineare Differentialgleichungen***Abgabe bis Freitag, den 23. Oktober, 13.00 Uhr***Aufgabe 1.** Berechnen Sie  $\exp A$  für die folgenden Matrizen  $A$ .

(a)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(b)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(c)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(d)  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ , wobei  $a, b > 0$ .

(e)  $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

(f)  $\begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$ , wobei  $a, b > 0$ .

(g)  $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(h)  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 2.** Seien  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .(a) Zeigen Sie, dass mit  $AB = BA$  auch  $e^{A+B} = e^A e^B$  erfüllt ist.(b) Finden Sie zwei Matrizen  $A$  und  $B$  so, dass  $e^{A+B} \neq e^A e^B$ .**Aufgabe 3.** Man löse das lineare System von Differentialgleichungen

$$\begin{cases} f' &= f + 3g, \\ g' &= 3f + g \end{cases}$$

unter der Anfangsbedingung

$$\begin{cases} f(0) &= 5, \\ g(0) &= 1 \end{cases}$$

Die folgende aufgabe wird während der Zentralübung gelöst werden, und sie zählt nicht für die Zulassung an der Prüfung.

**Aufgabe 4.** Gegeben sei die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + 2a_1y' + a_0y = b \tag{1}$$

mit einer  $C^0$ -Funktion  $b$  und Konstanten  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ .

- (a) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes  $\mathcal{L}_0$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung sowie ein Fundamentalsystem.
- (b) Finden Sie eine partikuläre Lösung und beschreiben Sie den affinen Raum  $\mathcal{L}_b$  der Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung zur Funktion  $b(x) = \sin x$ .
- (c) Es sei weiterhin  $b(x) = \sin x$ . Bestimmen Sie die Lösungen des Anfangswertproblems für (1) zu den Anfangsbedingungen  $y(0) = y_0$  und  $y'(0) = y_1$ .