RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie II
Heidelberg, 16.11.2017

Übungsblatt 4

Lie groups and Lie algebras

To hand in by November 29, 14:00.

Mathematikvollversammlung am 29. November 2017

Beginn 14 Uhr c.t., INF 205 (Mathematikon), PC-Pools 1 und 2
Unsere Fachschaft diskutiert und beschließt u.A. wie durch ihre ausführenden Organe Einfluss auf Studium und Lehre im Sinne der Studierenden genommen werden soll. Wir veranstalten deshalb zum ersten Mal die MatheVV, bei der die anwesenden Studis über aktuelle Themen aus Studium und Lehre diskutieren. In die Diskussion sollen Themen einfließen, die Deine aktuelle Studiensituation betreffen. Diese Möglichkeit bietet dir die kommende MatheVV, in deren Anschluss eine reine Mathematik-Fachschaftssitzung stattfindet. Dort hast Du mit deiner Anwesenheit automatisch Stimmrecht. Entscheide mit über Dein Studium und nutze Deine Stimme! Wir sorgen für Getränke während der Veranstaltung und im Anschluss treffen wir uns mit den Studis der Physik- und Informatikvollversammlungen zu Punsch und Keksen.

Mehr Infos unter: mathphys.info/w/mathevv_ws17
Ihr findet uns auch auf Twitter als @MathPhysInfo
und Facebook unter fb.com/fachschaft.mathphysinfo

Exercise 1. Prove that, if the curvature of a symmetric space M is different from zero, the parallel transport along piecewise geodesic paths might depend on the path.

(Hint: transvections realize parallel transport on symmetric spaces. Choose a symmetric space M, two points p, q and exhibit two different transvections t, s with $t(p) = s(p) = q$).

Exercise 2. Consider the space $\mathbb{R}^n$ with scalar product $\langle ., . \rangle$. Let $V \subset \mathbb{R}^n$ be a k-dimensional subspace, and let $V^\perp$ be its orthogonal. We denote by $O(k) \times O(n-k)$ the subgroup of $O(n)$ that preserves the orthogonal decomposition $V \oplus V^\perp$, where the factor $O(k)$ is acting on V and the factor $O(n-k)$ is acting on $V^\perp$.

Consider the group $G = SO(n)$ and the subgroups $K_1 = SO(k) \times SO(n-k)$, $K_2 = S(O(k) \times O(n-k))$, where $S(H)$ denotes all the elements of the group H with determinant 1.

(a) Prove that $(G, K_1), (G, K_2)$ are symmetric pairs with the same involutive automorphism.

(b) Find a natural covering map $G/K_1 \to G/K_2$.

(c) Show that the group K_2/K_1 has a natural action on G/K_1, that makes it the group of deck transformations of the covering above.

(d) What are G/K_1 and G/K_2? Can you find a geometric meaning of G/K_1 and G/K_2 that relates them to objects coming from linear algebra?

Exercise 3. For $X \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$, consider the limit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} X^k$$

(a) Prove that for every X the limit exists in $\mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$. Denote

$$e^X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$$

(Hint: choose a suitable norm on $\mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$, prove that $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} |X|^k$ exists in $\mathbb{R}$, and from this deduce the same result for matrices.)

(b) Prove that for X, Y commuting matrices, $e^{X+Y} = e^X e^Y$.

(c) Prove that for all $X \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$, $e^X \in GL(n, \mathbb{C})$.

(d) Prove that for every $X \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$, the map

$$\mathbb{R} \ni t \to e^{tX} \in GL(n, \mathbb{C})$$

is a one-parameter subgroup of $GL(n, \mathbb{C})$.

(e) Compute the derivative of the one-parameter subgroup above:

$$\frac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX} = e^{tX} X$$

(f) Prove that the map

$$\mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C}) \ni X \to e^X \in GL(n, \mathbb{C})$$

is locally invertible around 0.

(g) Prove that the above map is the exponential map of the Lie group $GL(n, \mathbb{C})$.