RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 19.06.2018

Übungsblatt 5

Vektorfelder

Abzugeben bis Dienstag, 03.07.18, 9:15 Uhr

(Insgesamt 60 Punkte = jeweils 10+10 Punkte)

Aufgabe 1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [a, b] \to M$ eine stückweise C^1-Kurve.

(a) Zeigen Sie, dass $L(\gamma)^2 \leq 2(b-a)E(\gamma)$ gilt, wobei $L(\gamma) = \int\limits_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\mathrm{d}t$ die Länge und $E(\gamma) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2\mathrm{d}t$ die Energie bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass Gleichheit in (a) genau dann gilt, wenn γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 2.

(a) Seien $(M, g), (N, h)$ semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine lokale Isometrie. Zeigen Sie, dass $c : (0, 1) \to M$ genau dann eine Geodätische ist, wenn $f \circ c : (0, 1) \to N$ eine Geodätische ist.

(b) Sei $a \in (0, \infty)$ und K_a der Kegel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = a\sqrt{x^2 + y^2}, z > 0\}$. Sei weiterhin $m_a \subset K_a$ die Gerade $\{(0, t, at) \mid t > 0\}$. Wir betrachten die Riemannsche Metrik auf der Untermannigfaltigkeit $K_a \setminus m_a$, die durch die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^3$ induziert wird. Zeigen Sie, dass $K_a \setminus m_a$ isometrisch zu einer Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 3. Sei $(r, h) : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve ($\dot{r}^2 + \dot{h}^2 = 1$), wobei $r(t) > 0$ $\forall t$ und h monoton steigend ist. Sei R die zugehörige Rotationsfläche, parametrisiert durch

$$F(s, \phi) = (r(s)\cos(\phi), r(s)\sin(\phi), h(s)).$$

Sei außerdem $H := \frac{\partial F}{\partial \phi}$ das horizontale und $V := \frac{\partial F}{\partial s}$ das vertikale Koordinatenvektorfeld. Zeigen Sie:

(a) ∇H ist schiefsymmetrisch, d.h. es gilt $\langle \nabla_X H, X\rangle = 0$ (punktweise) für alle Vektorfelder X auf R.

(b) Für jede Geodätische c auf R ist $\langle H(c(t)), \dot{c}(t)\rangle$ und folglich $\rho(t)\cos\alpha(t)$ konstant, wobei $\rho(t)$ den Abstand des Punktes $c(t)$ von der Rotationsachse (z-Achse) und $\alpha(t)$ den Winkel zwischen $\dot{c}(t)$ und $H(c(t))$ bezeichnet.

Präsenzaufgabe

Aufgabe 4. Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine nichtentartete symmetrische Bilinearform. Sei $k \neq 0$ eine Konstante und

$$V_k = \{p \in V \mid k \langle p, p \rangle \neq -1\}.$$

Wir betrachten die Riemannsche Metrik, die für $v, w \in \mathrm{T}_p V_k \cong V$ durch

$$g_p(v, w) = \frac{4}{(1 + k \langle p, p \rangle)^2} \langle v, w \rangle$$

gegeben ist.

(a) Verwenden Sie die Koszul-Formel, um den Term $2g(\nabla_X Y, Z)$ durch die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sowie die Funktion $f(p) = \frac{4}{(1+k\langle p,p \rangle)^2}$ (und ihre Ableitungen) auszudrücken.

(b) Berechnen Sie $(\nabla_X Y)(p) - (D_X Y)(p)$, wobei $D_X Y$ den Standard-Zusammenhang auf V bezeichnet.