RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 05.06.2018

Übungsblatt 4

Vektorfelder

Abzugeben bis Dienstag, 19.06.18, 9:15 Uhr

(Insgesamt 60 Punkte = jeweils 20 Punkte)

Aufgabe 1 (10+10 Punkte)**.**

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion und $g = f^* g_{eukl}$ der Pullback der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$, also $g(p)(v,w) = \langle \mathrm{d}f_p(v), \mathrm{d}f_p(w)\rangle$. Berechnen Sie die erste Fundamentalform g_{ij} in Termen von f.

(b) Das Katenoid ist das Bild der Immersion

$$(s,t) \mapsto (\cosh s \cos t, \cosh s \sin t, s),$$

das Helicoid ist das Bild der Immersion

$$(s,t) \mapsto (s \cos t, s \sin t, t).$$

Berechnen Sie explizit die erste Fundamentalform für beide Immersionen.

Aufgabe 2 (10+10 Punkte)**.** Betrachten Sie das Katenoid und das Helicoid, also die Bilder der Immersionen $f_1 : (s,t) \mapsto (\cosh s \cos t, \cosh s \sin t, s)$ und $f_2 : (s,t) \mapsto (s\cos t, s \sin t, t)$. Die Metrik (erste Fundamentalform) auf dem Katenoid wurde dabei durch die Matrix $\begin{pmatrix} \cosh^2 s & 0 \\ 0 & \cosh^2 s \end{pmatrix}$ beschrieben, die auf dem Helicoid durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2+1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Christoffelsymbole in beiden Fällen (f_1 und f_2 liefern nach geeigneter Einschränkung des Definitionsbereichs Karten).

(b) Sind die Kurven $s \mapsto f_i(s,0)$ und $t \mapsto f_i(0,t)$ Geodätische?

Aufgabe 3 (6+6+8 Punkte)**.**

(a) Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n und $p \in M$. Zeigen Sie, dass die möglichen Parallelverschiebungen entlang geschlossener Kurven,

$$\{P_c : \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_pM \mid c : [0,1] \to M \text{ stückweise glatt}, c(0) = c(1) = p\},$$

eine Untergruppe von $O(n)$ bilden, wobei $O(n)$ hier die orthogonale Gruppe des euklidischen Vektorraums T_pM bezeichnet.

(b) Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine Geodätische und $v \in \mathrm{T}_{\gamma(0)}M$. Zeigen Sie, dass die Parallelverschiebung $v(t)$ von v entlang γ einen konstanten Winkel mit $\dot{\gamma}$ einschließt.

(c) Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Sphäre. Wir betrachten für $\theta \in (0, \pi)$ die 3 Segmente

$$\begin{aligned}
\alpha &: [0, \pi/2] \to S^2,\ t \mapsto (-\sin t, 0, \cos t)\\
\beta &: [0, \theta] \to S^2,\ t \mapsto (-\cos t, -\sin t, 0)\\
\gamma &: [0, \pi/2] \to S^2,\ t \mapsto (-\cos\theta\cos t, -\sin\theta\cos t, \sin t).
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass der Paralleltransport entlang der stückweise glatten Kurve $\alpha * \beta * \gamma$ (die Verkettung der drei Segmente) eine Rotation um den Winkel θ in $\mathrm{T}_{(0,0,1)}S^2$ ist.

Präsenzaufgabe

Aufgabe 4. Wir betrachten $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der indefiniten Bilinearform $\langle x, y\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. Sei

$$H^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = -1, x_0 > 0\right\}$$

eine Komponente des n-dimensionalen Hyperboloid, und

$$dS^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = 1\right\}$$

der n-dimensionale de Sitter Raum.
Zeigen Sie:

(a) H^n und dS^n sind Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Das Bild des Tangentialraums T_xH^n unter dem Differential der Einbettung $\iota : H^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ist das orthogonale Komplement von x, $x^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v\rangle = 0\}$. Analog für dS^n.

(c) Die Einschränkung der Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf T_xH^n an jedem Punkt $x \in H^n$ (unter Verwendung der Identifikation mit $x^\perp$) bestimmt eine glatte Riemannsche Metrik auf H^n. Die Einschränkung auf $\mathrm{T}_x dS^n$ für alle $x \in dS^n$ bestimmt eine glatte semi-Riemannsche Metrik der Signatur $(n-1, 1)$.