RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 22.05.2018

Übungsblatt 3

Vektorfelder

Abzugeben bis Dienstag, 05.06.18, 9:15 Uhr

(Insgesamt 60 Punkte = jeweils 15 Punkte)

Aufgabe 1 (7+8 Punkte)**.** Sei M eine Mannigfaltigkeit, $V(M)$ der Vektorraum der Vektorfelder auf M, und $[\cdot,\cdot] : V(M) \times V(M) \to V(M)$ die Lieklammer.

(a) Zeigen Sie, dass $(V(M), [\cdot,\cdot])$ eine Liealgebra bildet, also die folgenden Eigenschaften besitzt:

- $[\cdot,\cdot] : V(M) \times V(M) \to V(M)$ ist $\mathbb{R}$-bilinear
- $[X, X] = 0 \;\; \forall X \in V(M)$
- $[X, Y] = -[Y, X] \;\; \forall X, Y \in V(M)$
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \;\; \forall X, Y, Z \in V(M)$ (Jacobi Identität)

(b) Für $X \in V(M)$ und eine Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ bezeichnet fX das Vektorfeld mit Wert $f(p)X_p$ am Punkt p. Weiterhin bezeichnet $X(f)$ die Funktion mit Wert $X_p(f) = \mathrm{d}f_p(X_p)$ am Punkt p. Zeigen Sie, dass für $X, Y \in V(M)$ und $f, g \in \mathcal{F}(M)$ die folgende Gleichung gilt:

$$[fX, gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X, Y]$$

Aufgabe 2 (7+8 Punkte)**.**

(a) Seien $E \xrightarrow{\pi} M$ und $F \xrightarrow{\pi'} M$ zwei Vektorbündel. Konstruieren Sie analog zur Whitneysumme ein Vektorbündel $E \otimes F$ über M mit Faser $E_p \otimes F_p$ über dem Punkt p.

(b) Seien ∇^E und ∇^F Zusammenhänge auf E bzw. F. Konstruieren Sie induzierte Zusammenhänge $\nabla^{E\oplus F}$ auf $E \oplus F$ und $\nabla^{E\otimes F}$ auf $E \otimes F$, die folgende Eigenschaften haben (zeigen Sie also insbesondere, dass es sich um Zusammenhänge handelt):

- Für Schnitte der Form $(s_E, 0) \in \Gamma(E \oplus F)$ gilt $\nabla^{E\oplus F}(s_E, 0) = (\nabla^E s_E, 0)$, analog für Schnitte der Form $(0, s_F)$.
- Für Schnitte der Form $s_E \otimes s_F$ gilt $\nabla^{E\otimes F}(s_E \otimes s_F) = (\nabla^E s_E) \otimes s_F + s_E \otimes (\nabla^F s_F)$.

Aufgabe 3 (5+5+5 Punkte)**.**

(a) Sei $M \times \mathbb{R}^k$ das triviale reelle Vektorbündel von Rang k über M. Wir definieren darauf wie folgt einen Zusammenhang:
Sei $s : M \to M \times \mathbb{R}^k$, $s(p) = (p, \sigma(p))$ ein Schnitt mit Hauptteil σ, $X \in V(M)$ ein Vektorfeld und $\omega \in \Gamma\left(\mathrm{T}^*M \otimes M_k(\mathbb{R})\right) = \Omega^1(M; M_k(\mathbb{R}))$ eine 1-Form mit Werten in den $k \times k$-Matrizen. Dann ist der Hauptteil des Schnittes $D^\omega_X s$ durch $X(\sigma) + \omega(X)\sigma$ gegeben, es gilt also

$$\left(D^\omega_X s\right)(p) = \left(p, X(\sigma)(p) + \omega(X)(p) \cdot \sigma(p)\right).$$

Zeigen Sie, dass D^ω ein Zusammenhang auf $M \times \mathbb{R}^k$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Schnitt $R^\omega(X,Y)s = D^\omega_X D^\omega_Y s - D^\omega_Y D^\omega_X s - D^\omega_{[X,Y]} s$ den Hauptteil $(\mathrm{d}\omega(X,Y) + [\omega(X), \omega(Y)])\,\sigma$ besitzt. Dabei ist $\mathrm{d}\omega : V(M) \times V(M) \to \mathcal{F}(M)$ durch $\mathrm{d}\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$ gegeben, und $[\omega(X), \omega(Y)]$ ist der Kommutator der beiden Matrizen.

(c) Betrachten Sie $M = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ und die 1-Form $\omega = \mathrm{d}x \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathrm{d}y \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ist der zugehörige Zusammenhang D^ω flach?
Hinweis: Zur Berechnung von $\mathrm{d}\omega$ dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass $\mathrm{d}\omega(X,Y)(p)$ nur von den Werten X_p, Y_p abhängt. In der Formel für $\mathrm{d}\omega$ können die Vektoren X_p, Y_p daher auf beliebige Weise zu Vektorfeldern X, Y ergänzt werden. (Diese Aussage folgt unter Verwendung von 1b) analog zum Beweis von 4, oder alternativ mittels der analogen Aussage für R)

Aufgabe 4 (15 Punkte)**.** Seien $E \xrightarrow{\pi} M$, $F \xrightarrow{\pi'} M$ Vektorbündel und $\mathcal{L} : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ eine tensorielle Abbildung. Zeigen Sie, dass eine eindeutige Bündelabbildung $L : E \to F$ existiert, so dass

$$\mathcal{L}(s) = L \circ s \quad \forall s \in \Gamma(E)$$

gilt.
Hinweis: Verwenden Sie Buckelfunktionen (bump function), um zu zeigen, dass $(\mathcal{L}(s))(p)$ bereits durch die Werte von s auf einer beliebigen Umgebung von p bestimmt ist. Betrachten Sie dann eine Umgebung U, über der das Vektorbündel trivial ist.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 5. (a) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Kein Zusammenhang ∇ auf $\mathrm{T}M$ erfüllt $\nabla_X Y = \nabla_Y X \ \forall X, Y \in V(M)$.

(b) Sei ∇ ein beliebiger Zusammenhang auf $\mathrm{T}M$ mit Torsion T. Zeigen Sie, dass $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}T(X,Y)$ ein torsionsfreier Zusammenhang ist.

(c) Sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit, $X, Y \in V(N)$ Vektorfelder, die entlang M tangential an M sind, also genauer: Für alle $p \in M$ gilt $X_p, Y_p \in \mathrm{T}_pM \subset \mathrm{T}_pN$. Zeigen Sie, dass dann für $p \in M$ auch $[X,Y]_p \in \mathrm{T}_pM$ gilt.
Hinweis: Überlegen Sie sich die folgende Äquivalenz: X_p tangential an $M \Leftrightarrow X_p(f) = 0$ für alle Funktionen f, die auf M konstant sind.

Aufgabe 6. Sei M eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\widehat{T} : V(M) \times V(M) \to V(M)$ eine schiefsymmetrische, tensorielle Abbildung. Zeigen Sie: Es gibt einen eindeutigen metrischen Zusammenhang auf $\mathrm{T}M$ mit Torsion $\widehat{T}$.