RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 08.05.2018

Übungsblatt 2

Vektorbündel

Abzugeben bis Dienstag, 22.05.18, 9:15 Uhr

(Insgesamt 60 Punkte = jeweils 7+8 Punkte)

Aufgabe 1. (In dieser Aufgabe soll die in der Vorlesung erwähnte Konstruktion von Vektorbündeln mittels Übergangsfunktionen mit Kozykelbedingung ausgeführt werden)

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M und V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Seien weiterhin für alle $(i,j) \in I \times I$ mit $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ glatte Abbildungen $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(V)$ gegeben, die folgende Eigenschaften besitzen:

- $g_{ii}(p) = \mathrm{Id}_V \quad \forall p \in U_i$
- $g_{ij} \cdot g_{jk}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} = g_{ik}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$

Wir betrachten die folgende Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung $\bigsqcup\limits_{i\in I} U_i \times V$: Für $(p,v) \in U_i \times V$ und $(q,w) \in U_j \times V$ gelte

$$(p,v,i) \sim (q,w,j) \quad \Leftrightarrow \quad p = q, w = g_{ji}(p) \cdot v.$$

(a) Zeigen Sie, dass $E = \bigsqcup\limits_{i\in I} U_i \times V \Big/ \sim$ eine Struktur als glatte Mannigfaltigkeit besitzt, so dass die Projektion $\pi : E \to M,\ [(p,v,i)] \mapsto p$ glatt ist.

(b) Für einen festen Punkt $p \in U_i$ kann die Faser $\pi^{-1}(p)$ durch Wahl der Repräsentanten in $U_i \times V$ mit V identifiziert werden. Zeigen Sie, dass die erhaltene Vektorraumstruktur auf $\pi^{-1}(p)$ nicht von der Wahl der Menge U_i abhängt.

Aufgabe 2. Seien V, W endlichdimensionale reelle Vektorräume, $\pi_E : E \to M$ ein V-Vektorbündel und $\pi_F : F \to M$ ein W-Vektorbündel. Wir schreiben $g^E_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(V)$ und $g^F_{ij} : V_i \cap V_j \to \mathrm{GL}(W)$ für die Übergangsfunktionen, wobei $\{U_i\}_{i\in I}$ und $\{V_j\}_{j\in J}$ offene Überdeckungen von M sind (siehe vorige Aufgabe). Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die Überdeckungen übereinstimmen (wieso?). Die *Whitneysumme* $E \oplus F$ ist ein $V \oplus W$-Vektorbündel über M mit Übergangsfunktionen $\left(g^E_{ij}, g^F_{ij}\right) : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W) \subset \mathrm{GL}(V \oplus W)$.

(a) Überprüfen Sie, dass $E \oplus F$ ein Vektorbündel ist (d.h. überprüfen Sie sorgfältig die Bedingungen aus der vorigen Aufgabe oder diejenigen aus der ursprünglichen Definition aus der Vorlesung).

(b) Zeigen Sie, dass die Bündel $\mathrm{T}S^n \oplus (S^n \times \mathbb{R})$ und $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ isomorph sind. Dabei bezeichnet $M \times V$ generell das triviale V-Bündel über M.
(*Definition*: Ein Bündelisomorphismus ist eine Bündelabbildung, zu der es eine inverse Bündelabbildung gibt.)

Aufgabe 3.

(a) Sei *Möb* das Möbiusbündel aus Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass $\mathit{Möb} \oplus \mathit{Möb} \cong S^1 \times \mathbb{R}^2$ gilt (wie üblich steht „$\cong$“ für „isomorph“).

(b) Das tautologische Linienbündel (bzw. sein Totalraum) über $\mathbb{RP}^n$ ist

$$L_n = \left\{(x, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in x\right\}.$$

Zeigen Sie, dass es eine natürliche Struktur als Vektorbündel über $\mathbb{RP}^n$ besitzt.

Aufgabe 4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $c : (0,1) \to M$ eine glatte Kurve.

(a) Zeigen Sie, dass $\dot{c} : (0,1) \to \mathrm{T}M,\ t \mapsto \mathrm{d}c_t(1)$ ein glatter Schnitt von $\mathrm{T}M$ längs c ist.

(b) Sei für diese Teilaufgabe $M = \mathbb{R}^2$ und $\dot{c}(t) \neq 0\ \forall t$. Die Orthogonale zu c, $\dot{c}_\perp : (0,1) \to \mathrm{T}\mathbb{R}^2$, wird durch folgende Eigenschaften definiert:

- $\dot{c}_\perp(t) \in \mathrm{T}_{c(t)}\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$
- $\langle \dot{c}_\perp(t), \dot{c}(t)\rangle = 0$
- $\langle \dot{c}_\perp(t), \dot{c}_\perp(t)\rangle = 1$
- $\det\left(\dot{c}(t), \dot{c}_\perp(t)\right) > 0$

Zeigen Sie, dass $\dot{c}_\perp$ ein glatter Schnitt von $\mathrm{T}\mathbb{R}^2$ längs c ist.

Präsenzaufgaben

Im Folgenden finden Sie ein paar Aufgaben, die in den Übungen besprochen werden können.

Aufgabe 5. Das *Möbiusbündel* ist die Menge $[0,1] \times \mathbb{R}/\sim$, mit der Äquivalenzrelation $(0,r) \sim (1,-r)$.

(a) Zeigen Sie, dass das Möbiusbündel eine Struktur als Vektorbündel von Rang 1 (Linienbündel) über S^1 besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass das Möbiusbündel nicht isomorph zum trivialen Bündel $S^1 \times \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 6. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n, $p \in M$, und $X : M \to \mathrm{T}M$ ein glatter Schnitt (ein Vektorfeld) mit $X(p) \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Umgebung U von p gibt, so dass $X(q) \neq 0 \ \forall q \in U$.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Karte (ϕ, V) um p gibt, so dass $\phi(p) = 0$ und $X(p)$ durch ϕ auf den Vektor $\frac{\partial}{\partial x_1}$ im Punkt 0 abgebildet wird.

(c) Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$. Zeigen Sie, dass das Urbild $\phi^{-1}(H)$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist.

Aufgabe 7.

(a) Sei $E \to M$ ein glattes Vektorbündel. Zeigen Sie, dass der Nullschnitt $s : M \to E,\ s(p) = 0_p \in E_p$ glatt ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{T}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 8.

(a) Finden Sie ein Vektorfeld auf S^2 mit genau einer Nullstelle.
Hinweis: Betrachten Sie die stereographische Projektion.

(b) Eine glatte Mannigfaltigkeit M der Dimension n heißt *parallelisierbar*, wenn es n Vektorfelder $X_1, \ldots, X_n$ auf M gibt, so dass für jeden Punkt $p \in M$ die Vektoren $X_1(p), \ldots, X_n(p) \in \mathrm{T}_pM$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie, dass S^1 und S^3 parallelisierbar sind.